Próbna matura Poziom Rozszerzony Marzec 2025/2026

Paulina od Matematyki

Zadanie 1. (0-2)

Liczba cząsteczek pewnej substancji S w reakcji chemicznej zmienia się w czasie zgodnie z zależnością

$$N(t) = N_0 \cdot p^t$$

gdzie

$N(t)$ – liczba cząsteczek substancji S w chwili t,

N_0 – liczba cząsteczek substancji S w chwili początkowej ($t = 0$),

p – współczynnik liczbowy charakterystyczny dla substancji S ($p > 0$),

t – czas wyrażony w godzinach, jaki upłynął od momentu rozpoczęcia reakcji ($t \geq 0$).

Wiadomo, że różnica liczby cząsteczek tej substancji w chwilach $t = 3$ oraz $t = 1$ jest równa 4800, a różnica liczby cząsteczek w chwilach $t = 4$ oraz $t = 2$ jest równa 9600.

Oblicz liczbę cząsteczek substancji S po upływie 5 godzin od momentu zainicjowania reakcji. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0-3)

Oblicz wartość wyrażenia

$$\left(\frac{log_3 21 - 1}{log_9 7\sqrt[3]{7}}\right)^{log_{2,25} c}$$

jeżeli $c = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-5n)^2}{5n(n+100)}$.

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla dwóch dowolnych liczb rzeczywistych x i y takich, że $x \geq 3y$ prawdziwa jest nierówność

$$4x^3 - 27xy^2 - 27y^3 + 1 > 0$$

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 4. (0-3)

W pewnym sklepie postanowiono zbadać ilu klientów podczas zakupów korzysta z karty lojalnościowej uprawniającej do zniżki. Okazało się, że średnio 1 na 5 klientów nie korzysta z tej karty.

W kolejce do kasy w tym sklepie stoi 8 osób. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej dwie z tych osób nie skorzystają z karty lojalnościowej podczas zakupów. Wynik podaj w ułamku dziesiętnym w zaokrągleniu do części tysięcznych. Zapisz obliczenia.

Zadanie 5. (0-3)

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD takich, że $|AB| > |CD|$. Przez wierzchołek C tego trapezu poprowadzono prostą prostopadłą do podstawy CD trapezu, która przecięła podstawę AB w punkcie E ($|AE| > |BE|$). Niech P oznacza pole tego trapezu.

Wykaż, że

$$\boldsymbol{|BD| = \sqrt{(|AE| + |CE|)^2 - 2P}}$$

Zadanie 6. (0-3)

Podstawą ostrosłupa prostego $ABCS$ jest trójkąt ABC, którego boki mają długości 5, 6 oraz 7. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy ostrosłupa kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = 0{,}96$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Zadanie 7. (0-4)

Ciąg (x, y, z) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym, a ciąg $(3x - y, 2y + z, x + y - 6z)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Ponadto spełniona jest równość

$$x + \frac{xy}{2} + \frac{xy^2}{4} + \frac{xy^3}{8} + \cdots = 8$$

gdzie lewa strona jest sumą nieskończonego, zbieżnego ciągu geometrycznego.

Oblicz x, y oraz z. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 8. (0-4)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\sphericalangle BAC| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ABC| = 3\alpha$. Kąt α jest kątem ostrym takim, że $tg\ 2\alpha = 3\sqrt{7}$.

Oblicz stosunek długości wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C na bok AB do długości wysokości poprowadzonej z wierzchołka A na bok BC. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$sin(4x) = -2sin\,x(sin\,x - cos\,x)(sin\,x + cos\,x)$$

w przedziale $[-\pi, 0]$**. Zapisz obliczenia.**

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 10. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{2}{x^2-6x+9}\geq\frac{3x^2-1}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}$$

Zapisz konieczne założenia i obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 11. (0-5)

Prosta l jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ w punkcie P, którego pierwsza współrzędna jest liczbą całkowitą, a druga współrzędna jest równa (-1). Środek okręgu O, którego promień ma długość $7\sqrt{5}$, leży na prostej o równaniu $y = x + 2$ i ma obie współrzędne całkowite. Prosta l jest styczna do tego okręgu.

Wyznacz współrzędne środka okręgu O oraz współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą l. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 12. (0-5)

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

$$f(x) = x^2 - (m-2)x + 2m + 17$$

Liczby x_1 oraz x_2 są dwoma różnymi miejscami zerowymi funkcji f oraz spełniają warunki

- $3 \cdot |x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2$
- $x_1^2 + x_2^2 > 35$

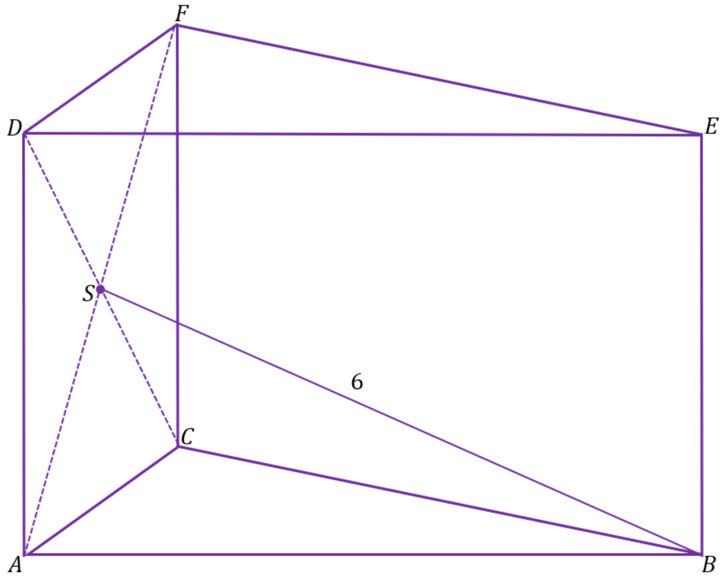
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których miejsca zerowe x_1 oraz x_2 funkcji f istnieją, mają <u>ten sam znak</u> i spełniają powyższe warunki. Zapisz obliczenia.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne $ABCDEF$, w których długość odcinka łączącego wierzchołek B graniastosłupa ze środkiem symetrii S ściany bocznej $ACFD$ ma długość równą 6 (zobacz rysunek).



Zadanie 13.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V graniastosłupa, jako funkcja wysokości H graniastosłupa, wyraża się wzorem

$$V(H) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(144H - H^3\right)$$

oraz $H \in (0, 12)$.

Zadanie 13.2. (0-5)

Objętość V graniastosłupa, jako funkcja wysokości H graniastosłupa, wyraża się wzorem

$$V(H) = \frac{\sqrt{3}}{12}(144H - H^3)$$

gdzie $H \in (0,12)$.

Wyznacz długość wysokości tego z rozważanych graniastosłupów, którego objętość jest możliwie największa. Oblicz cosinus kąta jaki tworzy przekątna AE ściany bocznej $ABED$ ze ścianą $ACFD$ tego graniastosłupa o największej objętości.

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com

© Paulina od Matematyki
www.paulinaodmatematyki.com