Przygotowanie do matury na MAKSA!

FESTIWALE MATURALNE

Matura z matematyki bez stresu!

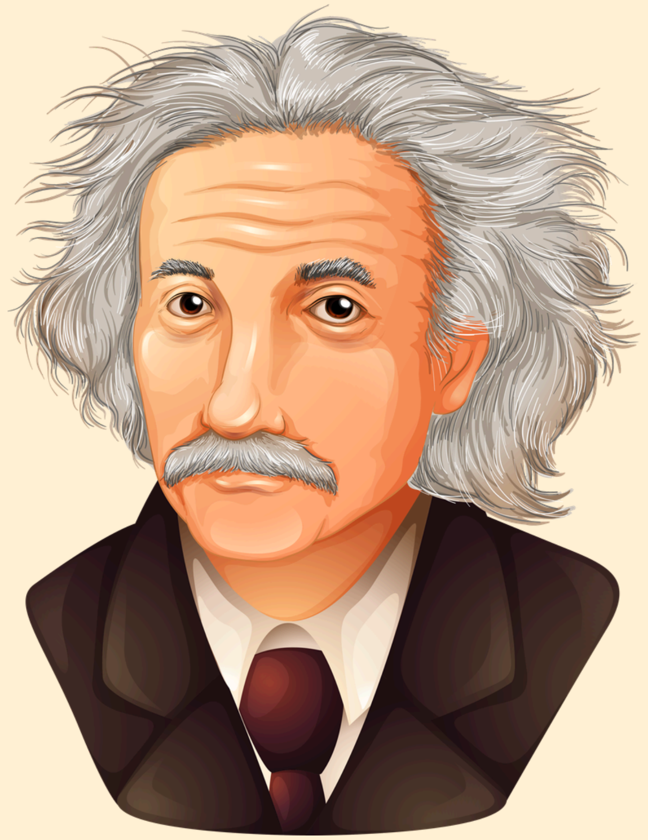
Prowadząca: **PAULINA MIŚ** — zdobywczyni I miejsca w Plebiscycie Orły Edukacji

Paulina od Matematyki

EXAM!

Jaki jest Wasz cel % z matury z matematyki?

Paulina od Matematyki



Szaleństwem jest robić wciąż to samo i oczekiwać różnych rezultatów.

Albert Einstein

Plan:

Część I – Logarytmy, dowody algebraiczne i wielomiany

Część II – Funkcje, funkcja kwadratowa, wymierna i logarytmiczna

Część III – Trygonometria i ciągi

Część IV – Planimetria, geometria analityczna, stereometria

Część V – Prawdopodobieństwo i Optymalizacja

Paulina od Matematyki

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\sqrt{x+y}$$

Logarytmy, dowody algebraiczne i wielomiany

Paulina od Matematyki

Logarytmy

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\boxed{\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b}$$

Równoważnie:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\boxed{\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}} \; / \cdot \log_e b$$

W szczególności: $\log_e b \cdot \log_b c = \log_e c$

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

Potęgi i pierwiastki

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:
  - dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$
  - dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
  - dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$\boxed{\begin{array}{c} a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \end{array}}$$

Paulina od Matematyki

Zadania

Dane są liczby $a = \left(\log_{\sqrt{5}} 2\right) \cdot \log_2 25$ i $b = \dfrac{\log_5 6}{\log_5 8}$.

Oblicz a^{b+1}.

$$4 = 8^x$$
$$2^2 = 2^{3x}$$
$$2 = 3x \quad /:3$$
$$x = \frac{2}{3}$$

$$a = \log_{\sqrt{5}} 25 = 4 \qquad b = \log_8 6$$

$$4^{\log_8 6 + 1} = 4^{\log_8 6} \cdot 4^1 = 8^{\frac{2}{3}\log_8 6} \cdot 4 = \cancel{8^{\log_8}} 6^{\frac{2}{3}} \cdot 4 =$$

$$= \sqrt[3]{6^2} \cdot 4 = \underline{4\sqrt[3]{36}}$$

Paulina od Matematyki

Zadania

$$\begin{cases} x^2-1>0 \\ x^2-1\neq 1 \\ x^3-2x^2+x+4>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty) \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\} \\ x\in(-1,\infty) \end{cases}$$

Zadanie 7.

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = \log_{x^2-1}(x^3 - 2x^2 + x + 4)$$

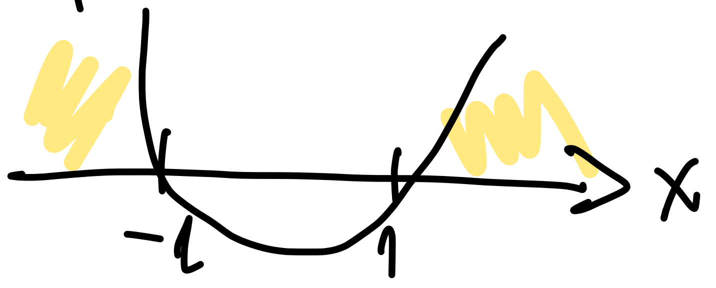
Odp. $x\in(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\infty)$

Zadanie 7.1. (0-3)

Wyznacz dziedzinę funkcji f. Zapisz obliczenia.

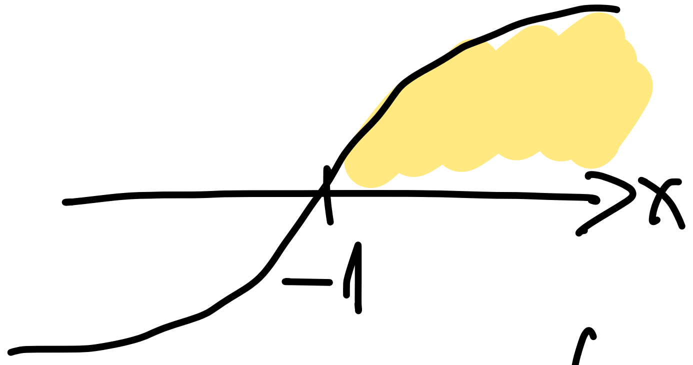
$(x-1)(x+1)>0$

$x_1=1 \vee x_2=-1$



$x^2\neq 2 \quad |\sqrt{\ }$

$x\neq\sqrt{2} \quad\wedge\quad x\neq-\sqrt{2}$



$\underbrace{x^3-2x^2+x+4}_{W(x)}>0 \qquad W(-1)=0$

	1	-2	1	4
-1		-1	3	-4
	1	-3	4	0

$(x+1)(x^2-3x+4)>0$

$\Delta=9-16=-7 \qquad \Delta<0$

brak m.z.

Paulina od Matematyki

Zadania

$$\log_{a^b} c = \frac{1}{b}\log_a c$$

$$x^2-1 \in (0,1)$$

Zadanie 7.2. (0-4)

Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $x \in (1, \sqrt{2})$ prawdziwa jest nierówność

$$f(x) \geq \log_{x^4-2x^2+1}(3x+3)^2$$

$$\log_{x^2-1}(x^3-2x^2+x+4) \geq \log_{(x^2-1)^2}(3x+3)^2$$

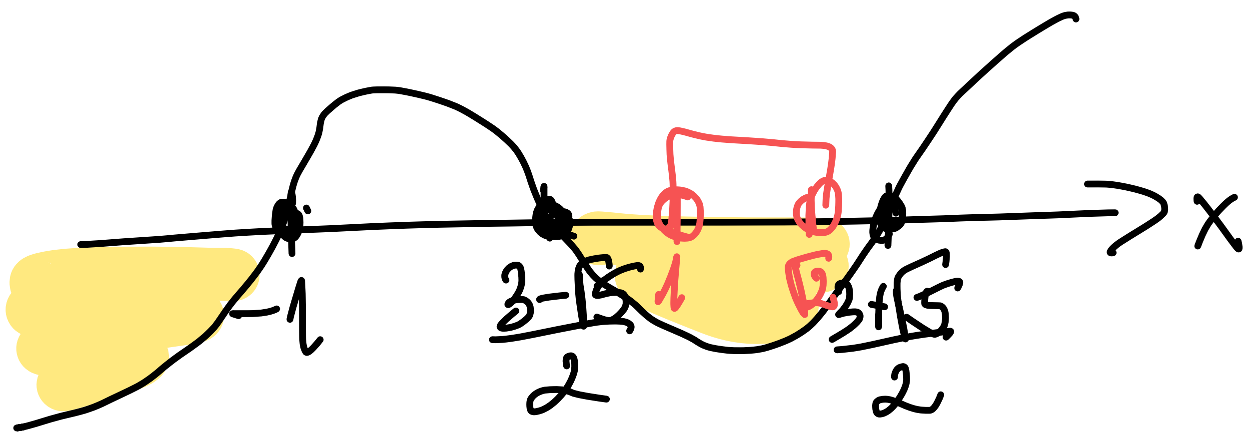
$$\log_{x^2-1}(x^3-2x^2+x+4) \geq \frac{1}{2}\log_{(x^2-1)}(3x+3)^2$$

$$x^3-2x^2+x+4 \leq 3x+3$$

$$(x+1)(x^2-3x+4)-3(x+1) \leq 0$$

$$(x+1)(x^2-3x+1) \leq 0$$

$$\Delta = 9-4=5$$



+ komentarz

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}4 \qquad x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}6$$

Wartość bezwzględna

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$|x| \geq 0$ $\quad$ $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$ $\quad$ $|-x| = |x|$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y mamy:

$|x + y| \leq |x| + |y|$ $\quad$ $|x - y| \leq |x| + |y|$ $\quad$ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych a oraz $r \geq 0$ mamy:

$|x - a| \leq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a - r \leq x \leq a + r$

$|x - a| \geq r$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \leq a - r$ lub $x \geq a + r$

$$\sqrt[4]{a^4} = |a|$$

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\sqrt[3]{a^3} = a$$

Paulina od Matematyki

Zadania

$$|a| = |b|$$

$$a = b \quad \vee \quad a = -b$$

Rozwiąż równanie $|x+2| = |2x-5|$

$$x + 2 = 2x - 5 \quad \vee \quad x + 2 = -2x + 5$$

$$7 = x \qquad\qquad 3x = 3$$

$$x = 1$$

Paulina od Matematyki

Zadania

Rozwiąż równanie $|x-2| = 2x+7$

$2x+7 \geq 0$

$2x \geq -7$

$x \geq -\frac{7}{2}$

$x-2 = 2x+7 \quad \vee \quad x-2 = -2x-7$

$-x = 9 \qquad 3x = -5 \; /:3$

$x = -9 \notin D \qquad x = -\frac{5}{3} \in D$

Odp. $x \in \left\{-\frac{5}{3}\right\}$

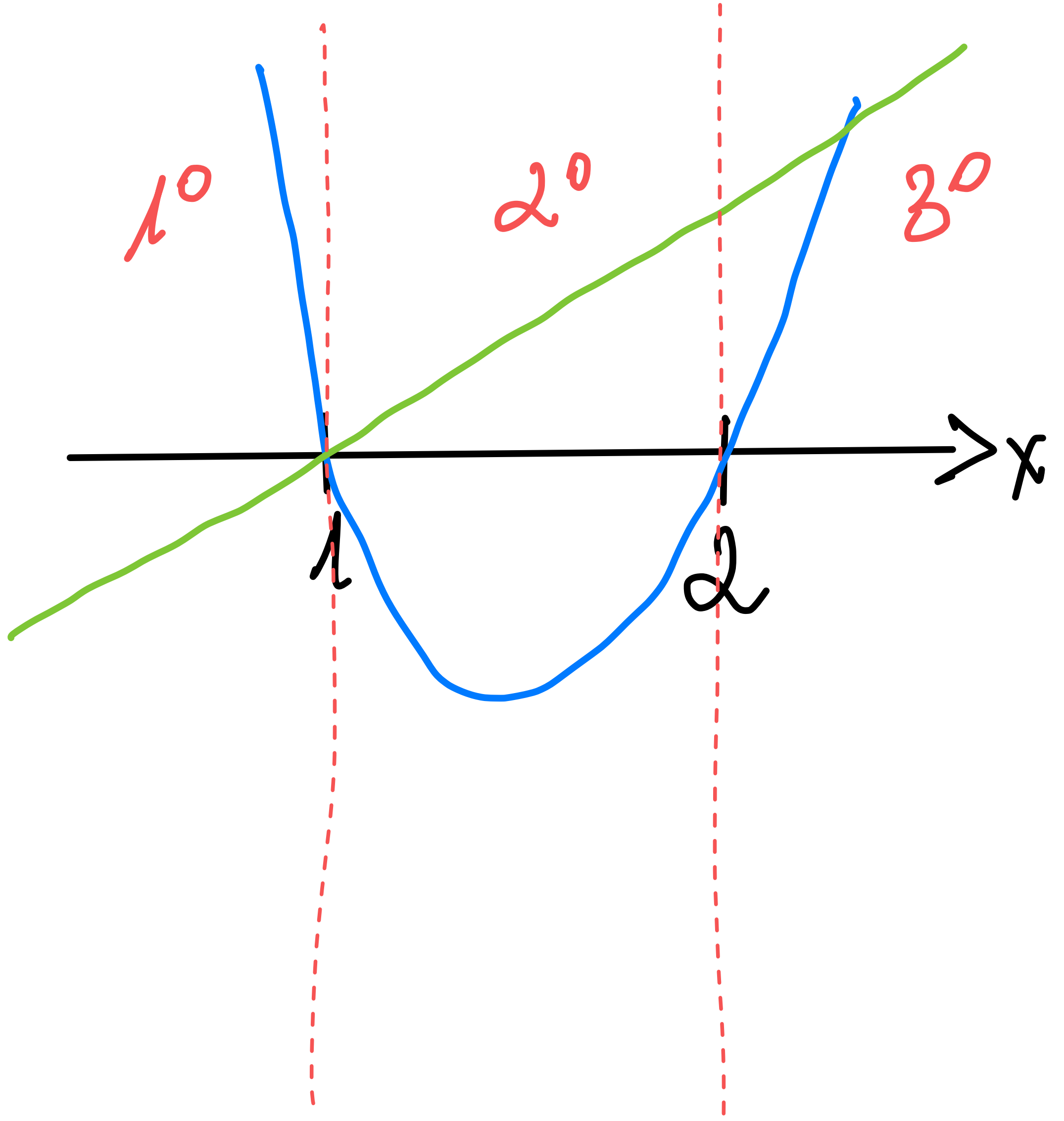
Zadania

Rozwiąż nierówność $|x^2 - 3x + 2| \geq |x - 1|$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 9 - 8 = 1$

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \qquad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$



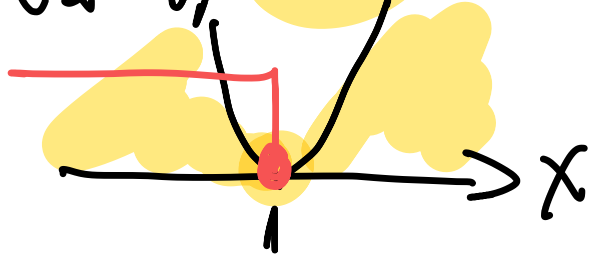
Odp. $x \in (-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

$1^\circ \; x \in (-\infty, 1]$

$x^2 - 3x + 2 \geq -x + 1$

$x^2 - 2x + 1 \geq 0$

$(x-1)^2 \geq 0$



$x \in (-\infty, 1]$

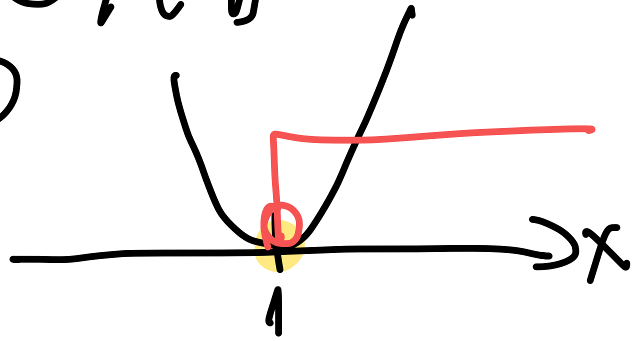
$2^\circ \; x \in (1, 2]$

$-x^2 + 3x - 2 \geq x - 1$

$-x^2 + 2x - 1 \geq 0 \quad / \cdot (-1)$

$x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$(x-1)^2 \leq 0$



$x \in \emptyset$

$3^\circ \; x \in (2, \infty)$

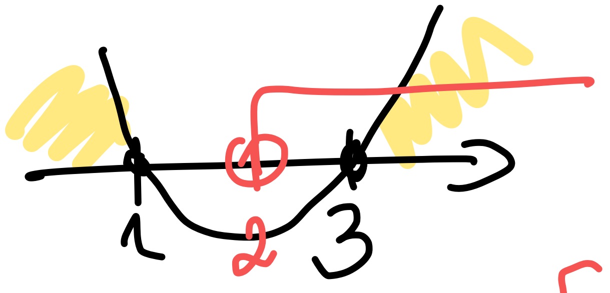
$x^2 - 3x + 2 - x + 1 \geq 0$

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4$

$x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$

$x_2 = 3$



$x \in [3, \infty)$

Dowody algebraiczne

1) wzory skróconego mnożenia

2) bezpośrednio z założenia

3) nierówności pomiędzy średnimi

4) pochodne

Paulina od Matematyki

Zadania

$$(x^2+2y^2)^2 = x^4+4x^2y^2+4y^4$$

Zadanie 3. (0-3)

Wykaż, że dla dwóch dowolnych liczb całkowitych x, y takich, że liczba $x^2 + 2y^2$ jest podzielna przez 2, liczba

$$3x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 + 2x^2$$

jest podzielna przez 4.

$$x^4+4x^2y^2+4y^4 + 2x^4 + 2x^2$$

$$\underbrace{(x^2+2y^2)^2} + \underbrace{2x^2(x^2+1)}$$

kwadrat l. parzystej jest podzielny przez 4

→ iloczyn dwóch kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 2

$2x^2(x^2+1)$ jest podzielne przez 4

Suma liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 4.

Paulina od Matematyki

Zadania

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a+b=1$, prawdziwa jest nierówność

$b=1-a$

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2a+1-a}+\frac{1}{a+2-2a}\geq\frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2-a}\geq\frac{4}{3} \quad /\cdot(a+1)(2-a)$$

$$2\cancel{-a}\cancel{+a}+1\geq\frac{4}{3}(a+1)(2-a) \quad /\cdot 3$$

$$9\geq 4(2a-a^2+2-a)$$

$$9\geq 4a-4a^2+8$$

$$4a^2-4a+1\geq 0$$

$$\underbrace{(2a-1)^2}_{\geq 0}\geq 0$$

+ komentarz

Zadania

Wykaż, że jeśli $a, b, c > 0$ *i* $a + b + c = 2$, *to* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1\frac{1}{3}$.

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$\frac{2}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \quad /()^2$$

$$\frac{4}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \quad /\cdot 3$$

$$\frac{4}{3} \leq a^2+b^2+c^2$$

śr. harmoniczna $\leq$ *śr. geometryczna* $\leq$ *śr. arytmetyczna* $\leq$ *śr. kwadratowa*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n}}$$

Paulina od Matematyki

Wielomiany

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \qquad a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \qquad a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

Wzory Viete'a dla wielomianu stopnia trzeciego:

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}$$

Wielomiany

Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu

Jeżeli wielomian $W(x)$, o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, który można zapisać za pomocą ułamka nieskracalnego, to licznik tego ułamka jest dzielnikiem wyrazu wolnego, natomiast mianownik - dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze.

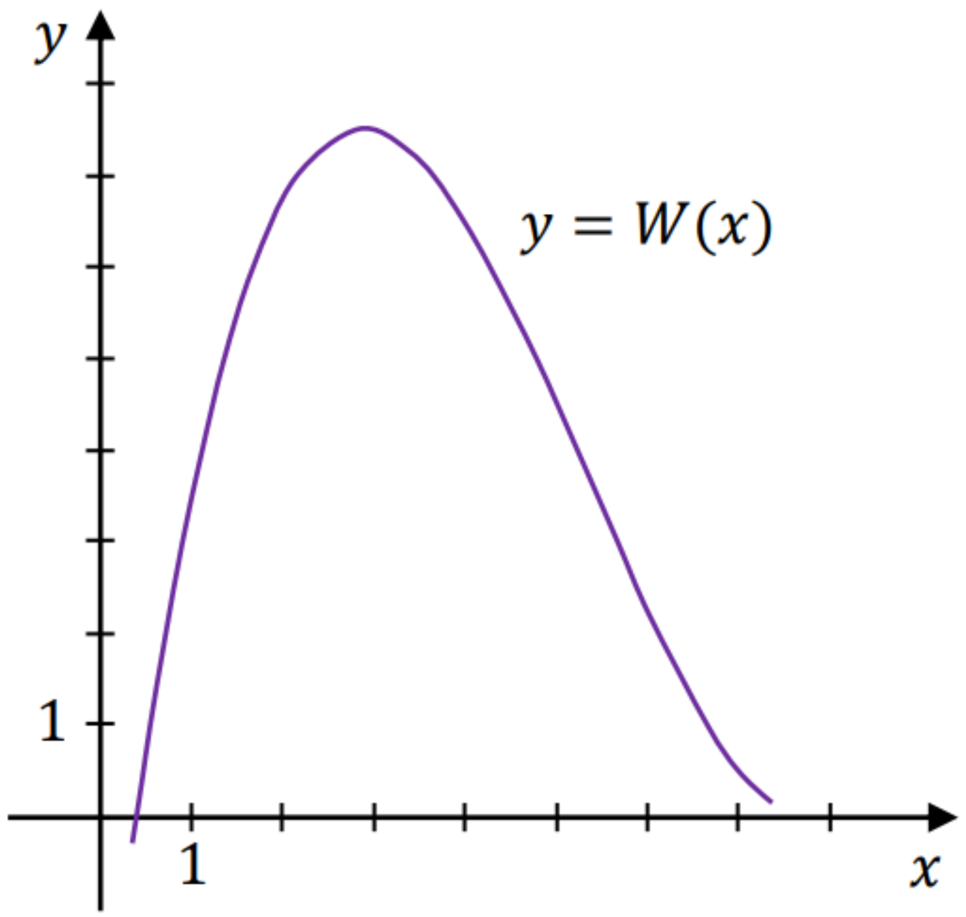
Jeśli suma wszystkich współczynników wielomianu jest równa 0 to 1 jest pierwiastkiem wielomianu.

Zadania

Na rysunku obok przedstawiono fragment wykresu wielomianu W określonego wzorem

$$W(x) = \frac{1}{8}x^3 - 2x^2 + \frac{67}{8}x - 3$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.



Oblicz wszystkie pierwiastki wielomianu W.
Zapisz obliczenia.

$0 = x^3 - 16x^2 + 67x - 24$

$W(8) = 512 - 1024 + 536 - 24 = 0$

Funkcje, funkcja kwadratowa, wymierna i logarytmiczna

Paulina od Matematyki

Wzory Viète'a

Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

przekształcenia funkcji

Dana jest funkcja $y = f(x)$:

Wykres funkcji $y = f(x-1)$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o 1 jednostkę w prawo

Wykres funkcji $y = f(x+1)$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o 1 jednostkę w lewo

Wykres funkcji $y = f(x) - 1$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o 1 jednostkę w dół

Wykres funkcji $y = f(x) + 1$ powstaje przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o 1 jednostkę w górę

Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje przez symetrię wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX (odbicie góra-dół)

Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje przez symetrię wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY (odbicie lewo-prawo)

Dziedzina i ZW

Paulina od Matematyki

Zadania

$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-p+1}{p}$

$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{1-2p}{p}$

Funkcja kwadratowa f jest określona wzorem $f(x)=px^2+(p-1)x+1-2p$ dla każdego $x\in\mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 i x_2, których różnica jest równa 1. Zapisz obliczenia.

$$\begin{cases}\Delta>0\\ |x_1-x_2|=1\\ p\neq 0\end{cases}\qquad \begin{cases}p\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3}\}\\ p\in\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\}\\ p\neq 0\end{cases}\Rightarrow p\in\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\}$$

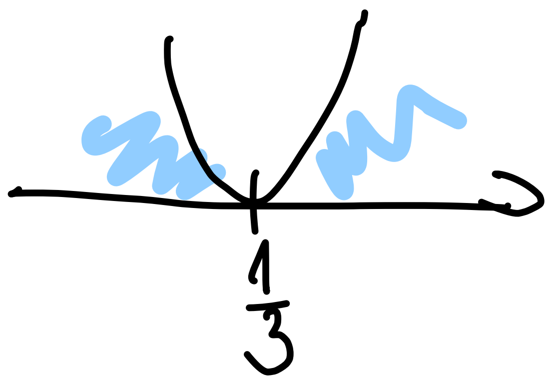
$\Delta=p^2-2p+1-4p(1-2p)=$

$=p^2-2p+1-4p+8p^2=$

$=9p^2-6p+1$

$(3p-1)^2>0$

$3p-1=0 \quad p=\frac{1}{3}$



$|x_1-x_2|=1 \;/()^2$

$(x_1-x_2)^2=1$

$x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=1$

$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=1$

$\left(\frac{-p+1}{p}\right)^2-4\cdot\frac{1-2p}{p}=1$

$\frac{p^2-2p+1}{p^2}-4\cdot\frac{1-2p}{p}=1 \;/\cdot p^2$

$\cancel{p^2}-2p+1-4p+8p^2=\cancel{p^2}$

$8p^2-6p+1=0$

$\Delta=36-32=4$

$p_1=\frac{6-2}{16}=\frac{1}{4}$

$p_2=\frac{1}{2}$

Paulina od Matematyki

Zadania

$\Delta = 16m^2 - 4(m+1)(3-m) =$

$= 16m^2 - 4(3m - m^2 + 3 - m) =$

$= 16m^2 - 8m + 4m^2 - 12 =$

$= 20m^2 - 8m - 12$

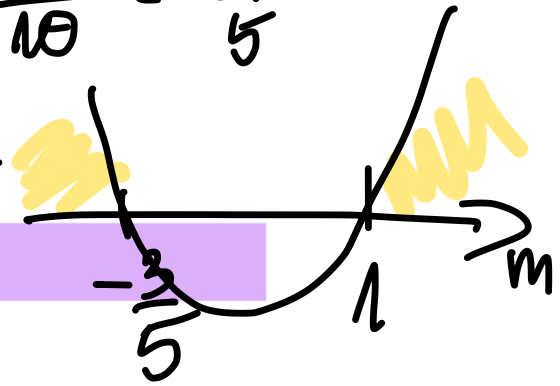
$20m^2 - 8m - 12 > 0 \quad /:4$

$5m^2 - 2m - 3 > 0$

$\Delta = 4 + 60 = 64$

$m_1 = \frac{2-8}{10} = -\frac{3}{5}$

$m_2 = 1$



Zadanie 12. (0-5)

Funkcja kwadratowa f zmiennej rzeczywistej x jest określona wzorem

$$f(x) = (m+1)x^2 - 4mx + 3 - m$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja f ma dwa różne miejsca zerowe x_1, x_2 oraz przyjmuje wartość największą, równą co najmniej $x_1 + x_2 - 2x_1x_2$.

$q = \frac{-\Delta}{4a}$

$$\begin{cases} q \geq x_1 + x_2 - 2x_1x_2 \\ m+1 < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m \in (-\infty, -1{,}8] \cup [1, \infty) \\ m \in (-\infty, -1) \\ m \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

$\frac{-20m^2 + 8m + 12}{4(m+1)} \geq \frac{4m}{m+1} - 2 \cdot \frac{3-m}{m+1} \quad / \cdot (m+1)$

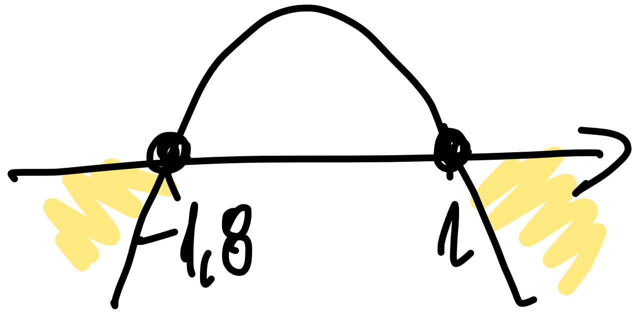
$m+1<0$

$-5m^2 + \cancel{2m} + 3 \leq 4m - 6 + \cancel{2m}$

$-5m^2 - 4m + 9 \leq 0$

$\Delta = 16 + 180 = 196 \qquad \sqrt{\Delta} = 14$

$m_1 = \frac{4-14}{-10} = 1 \qquad m_2 = \frac{18}{-10} = -1{,}8$



Odp. $m \in (-\infty; -1{,}8]$

Twierdzenie Darboux

Twierdzenie Darboux:

Jeśli funkcja f jest ciągła w pewnym przedziale $< a, b >$ i $f(a) \neq f(b)$, to funkcja f przyjmuje w przedziale (a, b) wszystkie wartości między $f(a)$ i $f(b)$.

Czyli w uproszczeniu możemy powiedzieć, że dowolna liczba, która leży pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ jest wartością tej funkcji dla jakiegoś argumentu z przedziału (a, b).

Paulina od Matematyki

Zadania

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{2x-3}{x+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} x$ dla każdego $x > 0$.

Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe, które należy do przedziału $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1-3}{2\frac{1}{2}} + 4\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} + 4\cdot 1 = -2\cdot\frac{2}{5} + 4 = \frac{-4}{5} + 4 = 3\frac{1}{5}$$

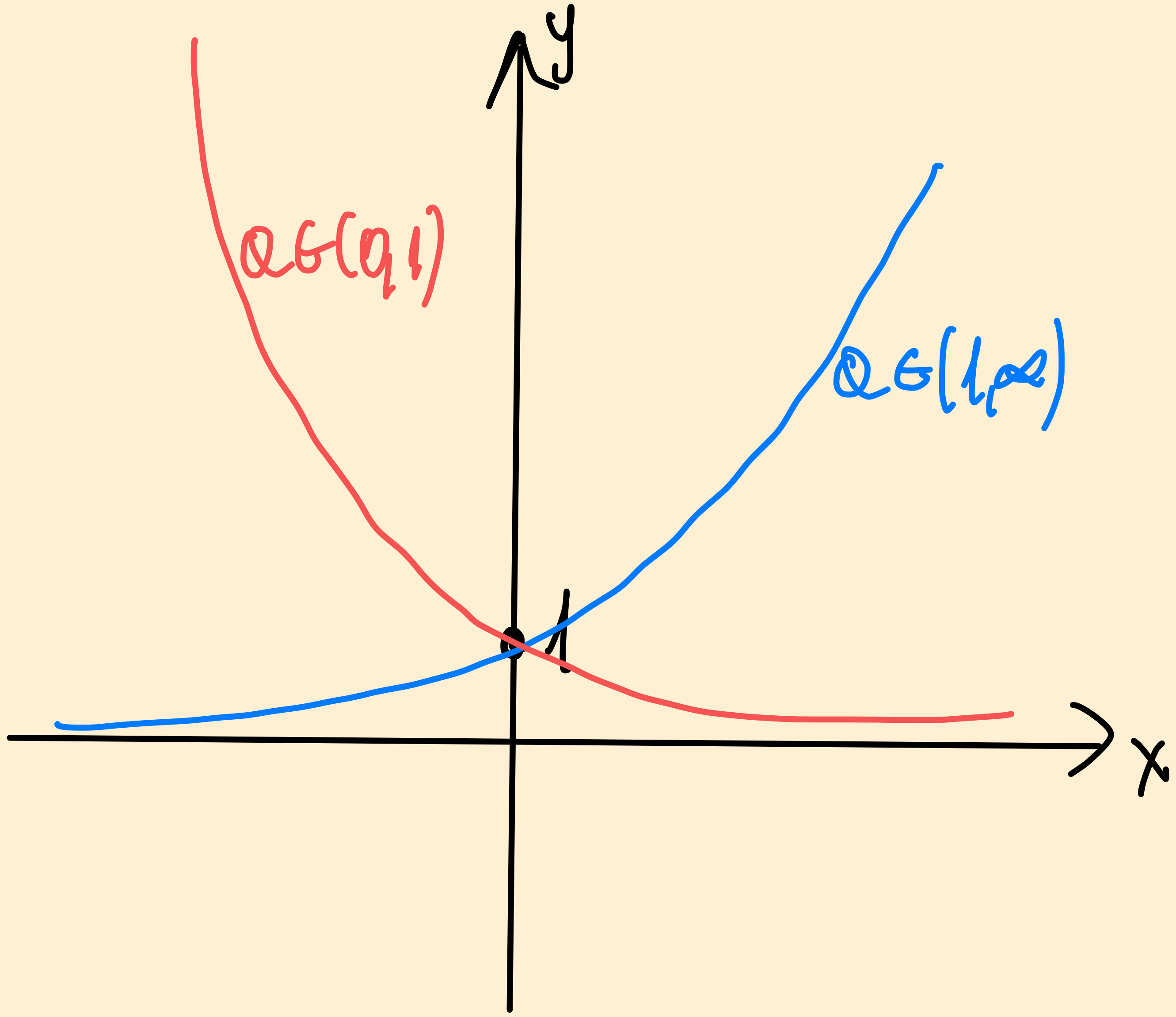
$$f(4) = \frac{8-3}{4+2} + 4\log_{\frac{1}{2}} 4 = \frac{5}{6} + 4\cdot(-2) = -8 + \frac{5}{6} = -7\frac{1}{6}$$

+ komentarz

Paulina od Matematyki

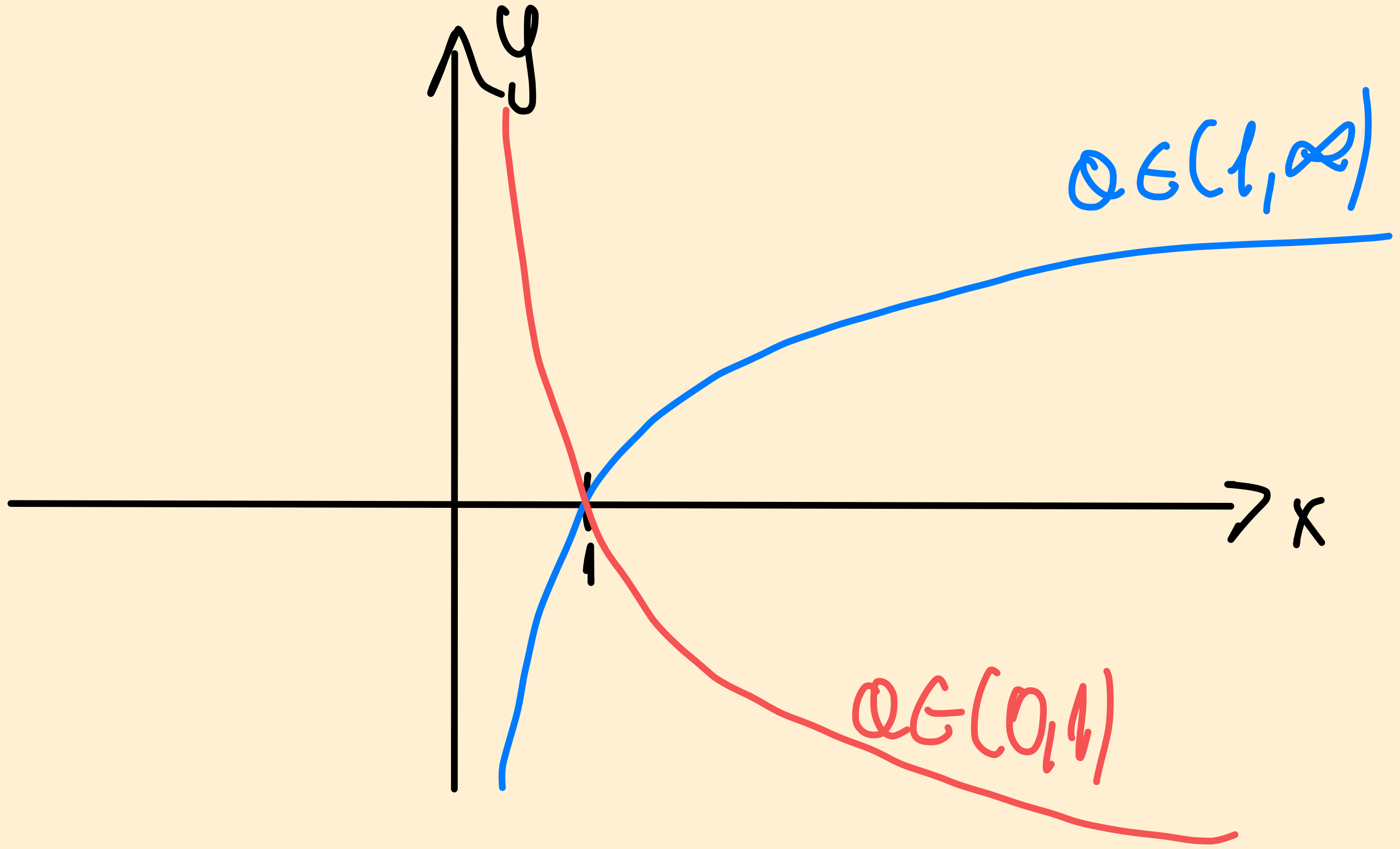
Funkcja wykładnicza

$f(x) = a^x, a \in R^+\{1\}$



Funkcja logarytmiczna

$f(x) = log_a x, a \in R^+\{1\}$



Paulina od Matematyki

Zadania

$$2{,}5 = 80 \cdot 2^{-\frac{15}{T}} \quad | :80$$

$$\frac{\cancel{5}^{1}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{80}_{16}} = 2^{-\frac{15}{T}}$$

$$2^{-5} = 2^{-\frac{15}{T}}$$

$$\cancel{-}5 = \cancel{-}\frac{15}{T}$$

$$T = 3$$

Zadanie 1. (0-2)

Substancja radioaktywna X ulega rozpadowi zgodnie z równaniem

$$M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

gdzie

M_0 – masa początkowa substancji X (wyrażona w gramach)

t – czas wyrażony w godzinach

T – czas połowicznego rozpadu substancji X (wyrażony w godzinach)

$M(t)$ – masa substancji X po czasie t (wyrażona w gramach)

Badaniu poddano próbkę substancji X o masie początkowej równej 80g. Po 15 godzinach, masa analizowanej próbki zmniejszyła się do 2,5g.

Oblicz, po ilu pełnych godzinach masa substancji radioaktywnej X będzie po raz pierwszy mniejsza od 5g.

$$80 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} < 5 \quad | :80$$

$$2^{-\frac{t}{3}} < \frac{1}{16}$$

$$2^{-\frac{t}{3}} < 2^{-4}$$

$$-\frac{t}{3} < -4 \quad | \cdot (-3)$$

$$t > 12$$

Odp. Po 13 h.

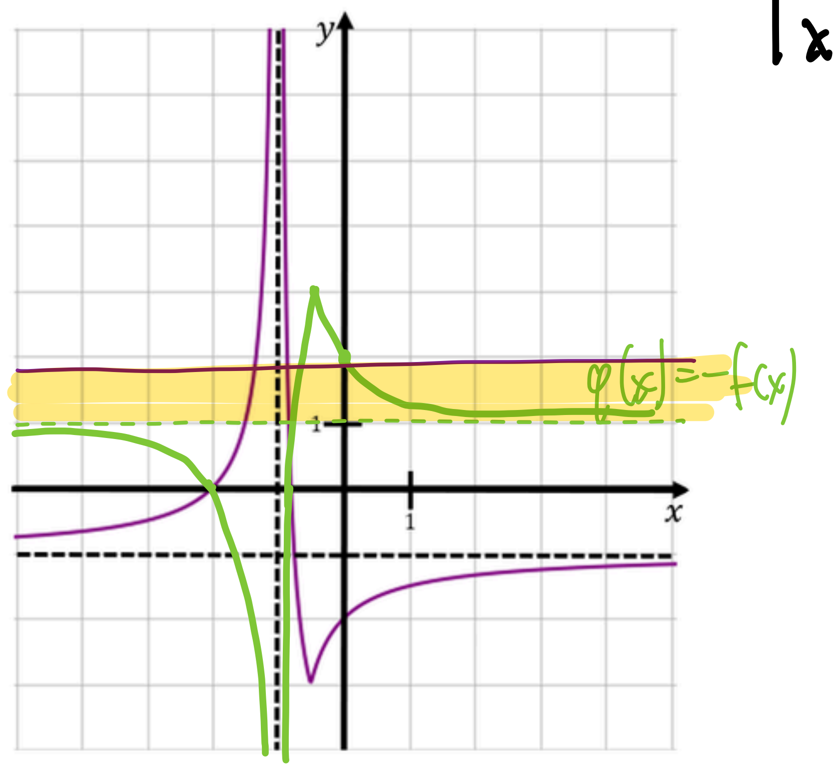
Paulina od Matematyki

Zadania

Zadanie 6.

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \left|\frac{1}{x+1} - 2\right| - 3$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -1$.

Fragment wykresu tej funkcji przedstawiono na poniższym rysunku.



Zadanie 6.1. (0-3)

Rozwiąż nierówność

$$f(x) < 2$$

Zapisz obliczenia.

$$\left|\frac{1}{x+1} - 2\right| - 3 < 2$$

$$\left|\frac{1}{x+1} - 2\right| < 5$$

$$\frac{1}{x+1} - 2 < 5 \quad \wedge \quad \frac{1}{x+1} - 2 > -5$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{7(x+1)}{x+1} < 0 \,/\cdot (x+1)^2 \qquad \frac{1}{x+1} + \frac{3(x+1)}{x+1} > 0 \,/\cdot (x+1)^2$$

$$(1-7x-7)(x+1) < 0 \qquad (1+3x+3)(x+1) > 0$$

$$(-6-7x)(x+1) < 0 \qquad (4+3x)(x+1) > 0$$

$$x = -\frac{6}{7} \quad x = -1 \qquad x = -\frac{4}{3} \quad x = -1$$

$$-1 \quad -\frac{6}{7} \qquad -\frac{4}{3} \quad -1 \quad x$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{6}{7}, \infty\right) \\ x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (-1, \infty) \end{cases}$$

Odp. $x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{6}{7}, \infty\right)$

Paulina od Matematyki

Zadania

Zadanie 6.2. (0-4)

Funkcja g jest określona za pomocą funkcji f wzorem

$$g(x) = -f(x)$$

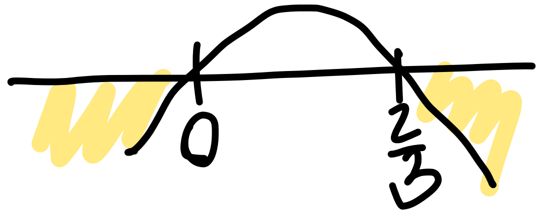
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $g(x) = -3m^2 + 2m + 2$ ma dokładnie dwa rozwiązania różnych znaków.

$$\begin{cases} -3m^2+2m+2<2 \\ -3m^2+2m+2>1 \end{cases}$$

$$-3m^2+2m<0$$

$$m(-3m+2)<0$$

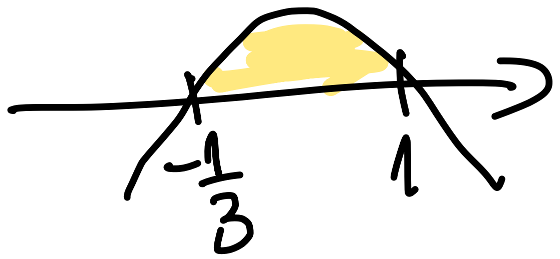
$$m=0 \quad \vee \quad m=\frac{2}{3}$$



$$-3m^2+2m+1>0$$

$$\Delta = 4+12=16$$

$$m_1 = \frac{-2-4}{-6} = 1 \qquad m_2 = \frac{-2+4}{-6} = -\frac{1}{3}$$



$$\begin{cases} m \in (-\infty, 0) \vee \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \\ m \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \text{Odp. } \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \vee \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

Paulina od Matematyki

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\cdot d}{2} \times n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n$$

Trygonometria i ciągi

Trygonometria

Paulina od Matematyki

Zadania

$x \in \{-2\pi, -\pi, 0, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{4}\}$

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$2\sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x = \sqrt{2}\sin 2x$$

w przedziale $[-2\pi, 0]$.

$$2\sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0$$

$$2\sin x\cos x(\sin x + \cos x - \sqrt{2}) = 0$$

$2\cos, k \in Z$

$\sin x = 0 \lor \cos x = 0 \lor \sin x + \cos x = \sqrt{2}$

$x = k\pi$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = \sqrt{2}$

$2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} + x}{2} \cdot \cos\frac{x - \frac{\pi}{2} - x}{2} = \sqrt{2}$

$2\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\cancel{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} \quad / : \sqrt{2}$

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Paulina od Matematyki

Zadania

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8} \right\}$$

Zadanie 8. (0–4)

Rozwiąż równanie

$$\sin(5x) + \cos x = 0$$

w zbiorze $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Zapisz obliczenia.

$$\sin(5x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$$

$$2\sin\frac{5x + \frac{\pi}{2} + x}{2} \cdot \cos\frac{5x - \frac{\pi}{2} - x}{2} = 0$$

$$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$k \in \mathbb{Z}$!

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$3x + \frac{\pi}{4} = k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad /:3$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi \cdot 4}{3 \cdot 4}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad /:2$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi \cdot 4}{2 \cdot 4}$$

Paulina od Matematyki

$x \in \left\{ \frac{5\pi}{8}, \frac{\pi}{3}, \pi \right\}$

Zadania

Rozwiąż równanie $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ $/:2$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

$$\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

$$\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos 3x + \cos\frac{\pi}{6} \sin 3x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 3x\right) = -\frac{1}{2}$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{6} + 3x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi}{6} + 3x = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad /:3 \qquad\qquad 3x = -\pi + 2k\pi \quad /:3$$

$$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3}k\pi \qquad\qquad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi$$

Paulina od Matematyki

Zadania

Oblicz zbiór wartości funkcji

$f(x) = sinx + cosx$

$$f(x) = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$$

$$= 2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}+x}{2} \cdot \cos\frac{x-\frac{\pi}{2}-x}{2} =$$

$$= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cancel{2} \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} \cdot \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-1 \leq \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad / \cdot \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$ZW: \ y \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$$

Ciągi

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli dane są trzy ciągi liczb rzeczywistych a_n, b_n oraz c_n oraz $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego n i wiadomo, że $\lim_{n \to \infty} a_n = g$ i $\lim_{n \to \infty} c_n = g$ to $\lim_{n \to \infty} b_n = g$.

Dla uproszczenia, możemy ująć to następująco: jeśli potrafimy wskazać dla danego ciągu dwa inne ciągi, które go ograniczają (z góry i z dołu), a których granice potrafimy obliczyć i one są sobie równe, to wtedy także ten ciąg ma taką samą granicę.

Paulina od Matematyki

Zadania

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n} = x$$

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6^n+7^n}$. Zapisz obliczenia.

$$\sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{6^n+7^n} \leq \sqrt[n]{2\cdot 7^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n} = 7 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2\cdot 7^n} = 7$$

+ komentarz

Paulina od Matematyki

Zadania

Zadanie 1. (0-2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3-2n)^3-(2-n)^3}{n(-2n-1)^2}$$

Zapisz obliczenia.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{27-54n+36n^2-8n^3-(8-12n+6n^2-n^3)}{n(4n^2+4n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{27-54n+36n^2-8n^3-8+12n-6n^2+n^3}{4n^3+4n^2+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-7n^3+30n^2-42n+19}{4n^3+4n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}\left(-7+\underbrace{\frac{30}{n}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{42}{n^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{19}{n^3}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left(4+\underbrace{\frac{4}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)} = -\frac{7}{4}$$

Paulina od Matematyki

Zadania

$S = \frac{a_1}{1-q}$

Zadanie 13. (0–4)

W nieskończonym malejącym ciągu geometrycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, jest spełniony warunek

$$\frac{a_5 + a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 6.

Wyznacz wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n). Zapisz obliczenia.

$\frac{a_5}{a_3} + \frac{a_3}{a_3} = \frac{29}{25}$

$q^2 + 1 = \frac{29}{25}$

$q^2 = \frac{4}{25} \quad | \sqrt{\ }$

$q = \frac{2}{5} \vee q = -\frac{2}{5} \notin D$

$6 = \frac{a_2}{1-q^2}$

$6 = \frac{a_2}{1-\frac{4}{25}}$

$6 = \frac{a_2}{\frac{21}{25}} \quad / \cdot \frac{21}{25}$

$a_2 = a_1 \cdot q$

$\frac{126}{25} = a_1 \cdot \frac{2}{5} \quad / : \frac{2}{5}$

$a_1 = \frac{126}{25} \cdot \frac{5}{2} = \frac{63}{5}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_n = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{63}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n} \cdot \frac{5}{2}$

$a_n = \frac{63}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n}$

Paulina od Matematyki

Zadania

dla $r_1=2$

$\begin{cases} a=5 \\ b=10 \\ c=20 \end{cases}$ $\cdot 2$

dla$_2$ $r=4$

$\begin{cases} a=3 \\ b=12 \\ c=48 \end{cases}$ $\cdot 4$

$b^2=a\cdot c$

$2b=a+c$

Zadanie 10. (0-4)

Ciąg (a, b, c) jest trzywyrazowym ciągiem geometrycznym, a ciąg $(a + 4, 11, b + 3)$ jest trzywyrazowym ciągiem arytmetycznym. Iloraz ciągu geometrycznego jest równy różnicy ciągu arytmetycznego.

Oblicz *a*, *b* oraz *c*. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

$b^2=a\cdot c$

$22=a+4+b+3$

$q=r$

$r=11-a-4$

$r=b+3-11$

$r=q=\frac{b}{a}$

$r=7-a$

$r=b-8$

$a=7-r$

$b=r+8$

$r=\frac{r+8}{7-r} \quad / \cdot 7-r$

$7r-r^2=r+8$

$0=r^2-6r+8$

$\Delta=36-32=4$

$r_1=\frac{6-2}{2}=2$

$r_2=\frac{6+2}{2}=4$

Jeżeli ktoś z Was poczuje, że te zajęcia albo ten materiał naprawdę mu pomogły — to będzie mi bardzo miło, jeśli zostawicie opinię na Google.

To pomaga innym uczniom trafić na dobre materiały, a mi rozwijać to, co robię

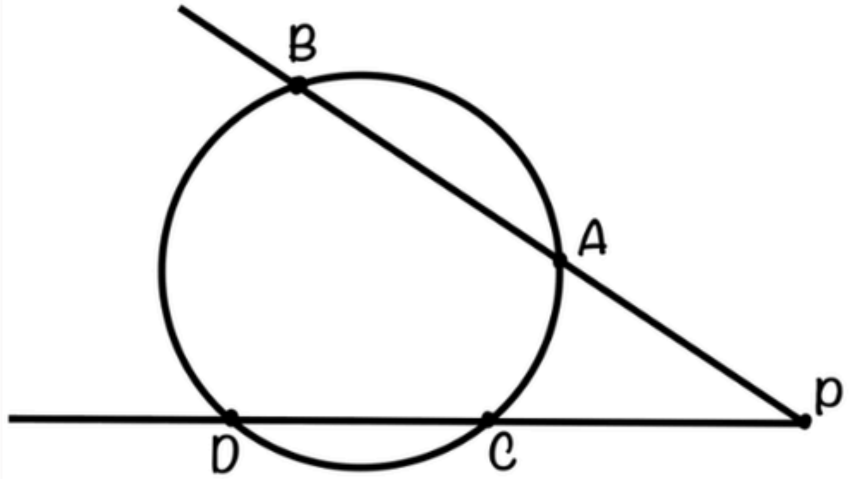
Planimetria, geometria analityczna, stereometria

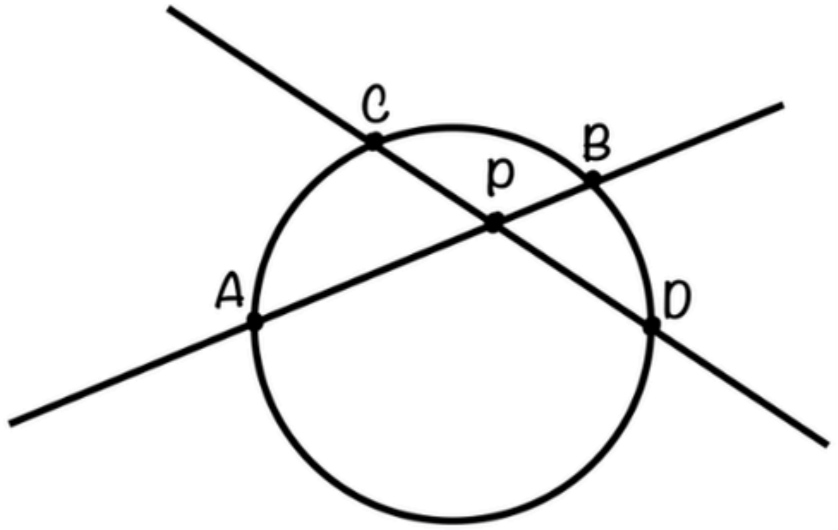
Paulina od Matematyki

Planimetria

Jeśli dwie proste przecinają okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, a także przecinają się w punkcie P to

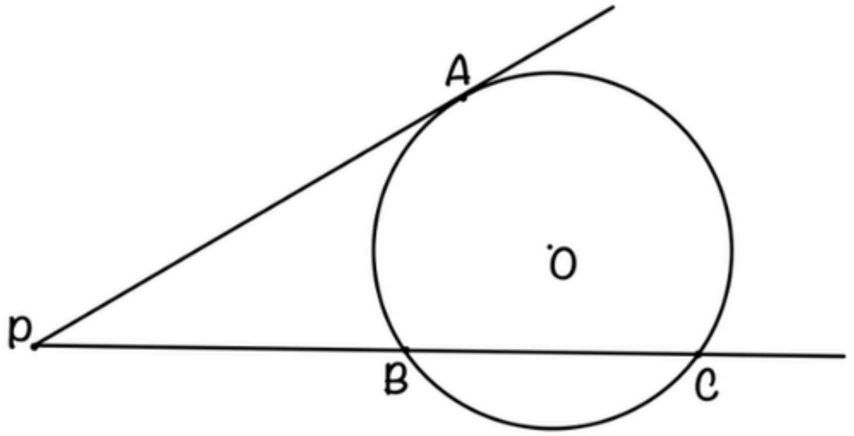
$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$$





Twierdzenie o stycznej i siecznej

Jeżeli prosta przecinająca okrąg w punktach B i C oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie A, przecinają się w punkcie P to



$$|PB| \cdot |PC| = |PA|^2$$

Paulina od Matematyki

Okrąg wpisany w czworokąt

W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$

Pole czworokąta: $P = pr = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r$

Promień okręgu wpisanego w czworokąt: $r = \frac{2P}{a+b+c+d}$

Okrąg wpisany i opisany na czworokącie

Jeżeli w czworokąt można wpisać okrąg i na czworokącie można opisać okrąg, to jego pole jest równe $P = \sqrt{abcd}$

Okrąg opisany na czworokącie

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$$

Pole czworokąta: $P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$

p – połowa obwodu czworokąta

Pole dowolnego czworokąta

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\gamma$$

γ to kąt przecięcia przekątnych

Planimetria

Własności trapezu

- Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

- Pole trapezu: $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$

- Suma miar kątów przy jednym ramieniu trapezu jest równa 180°.

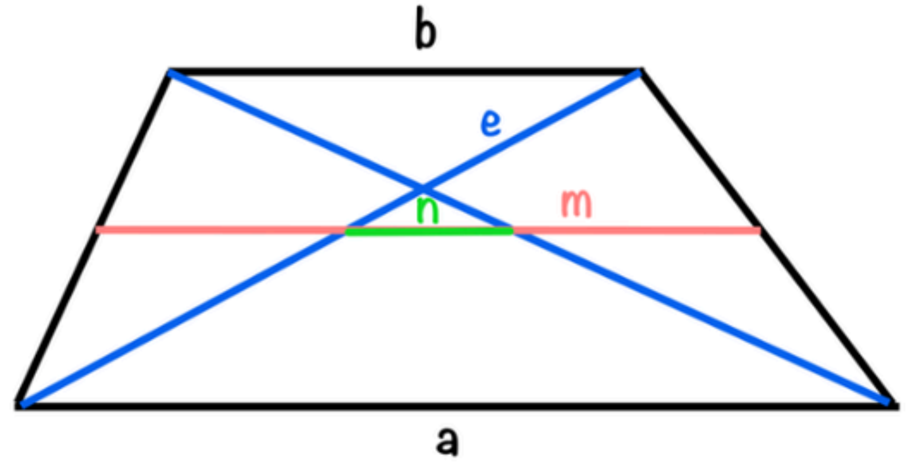
- Jeżeli trapez jest równoramienny: $P = \frac{1}{2}e^2 \cdot \sin\gamma$

- Odcinek łączący środki ramion trapezu (m) jest równoległy do obu podstaw trapezu, a jego długość jest równa połowie sumy długości podstaw trapezu

$$m = \frac{a+b}{2}$$

- Odcinek łączący środki przekątnych trapezu (n) jest równoległy do obu podstaw trapezu i jest połową różnicy długości jego podstaw

$$n = \frac{|a-b|}{2}$$



Kąty $n - kąta$ foremnego

Miara kąta wewnętrznego $n - kąta$ foremnego: $\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

Suma miar kątów wewnętrznych $n - kąta$ foremnego: $S = (n-2) \cdot 180°$

Przekątne wielokąta wypukłego

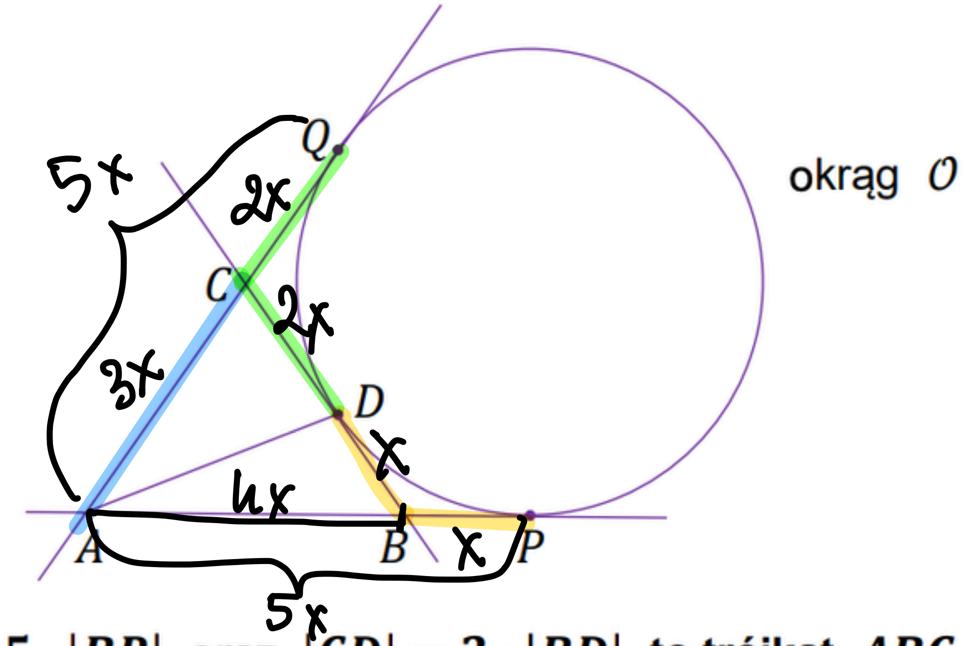
Liczba przekątnych wielokąta wypukłego jest równa $p = \frac{n(n-3)}{2}$

Paulina od Matematyki

Zadania

Zadanie 6. (0–3)

Dany jest okrąg $\mathcal{O}$. Przez punkt A poprowadzono dwie proste, które są styczne do tego okręgu w punktach – odpowiednio – P oraz Q. Przez punkt B leżący na odcinku AP poprowadzono styczną do tego okręgu w punkcie D, która przecięła odcinek AQ w punkcie C (zobacz rysunek).



$|AC| = 3x$
$|AB| = 4x$
$|CB| = 3x$

Wykaż, że jeżeli $|AQ| = 5 \cdot |BP|$ oraz $|CD| = 2 \cdot |BD|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

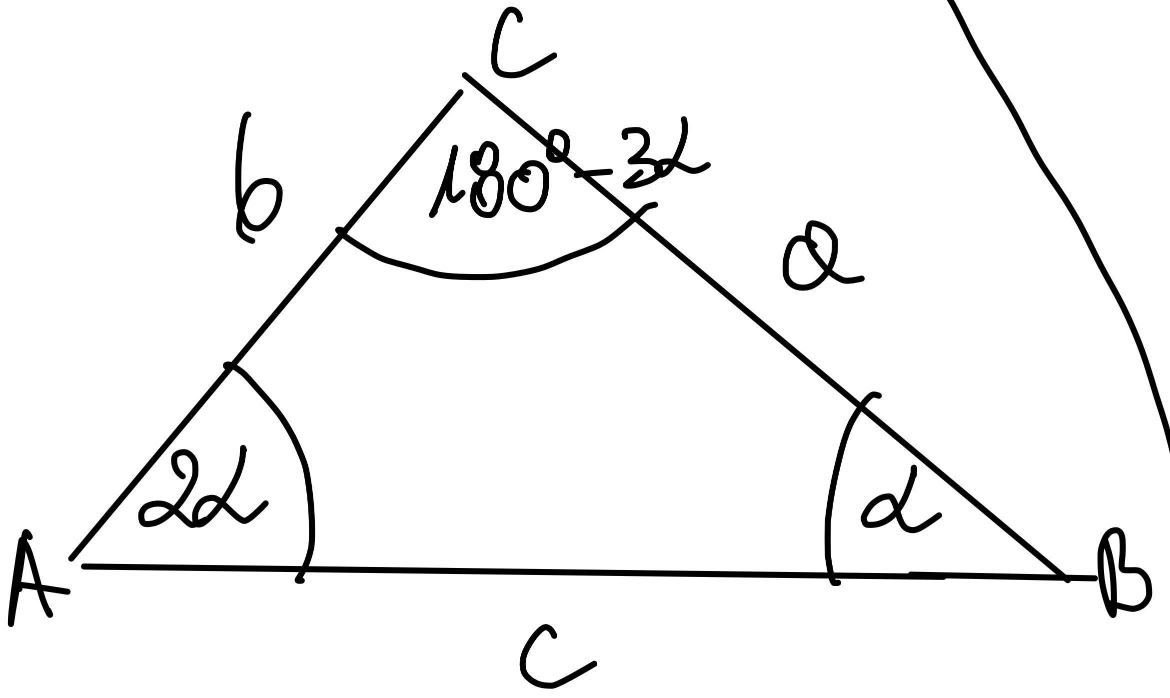
Paulina od Matematyki

Zadania

Zadanie 8. (0-4)

Dany jest trójkąt ABC. Kąt ABC tego trójkąta ma miarę dwa razy mniejszą od miary kąta CAB.

Wykaż, że $\cos \sphericalangle CAB = \frac{|AB|-|AC|}{2|AC|}$.



teza: $\cos 2\alpha = \frac{c-b}{2b}$

Tw. sin

$\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$

$b \cdot \sin 3\alpha = c \cdot \sin\alpha$

$b(\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha) = c \cdot \sin\alpha$

$b(\sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha) = c \cdot \sin\alpha$ $\quad \sin\alpha > 0$

$b \cdot \sin\alpha(\cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha) = c \cdot \sin\alpha \quad / : \sin\alpha$

$b \cdot (\cos 2\alpha + \cos 2\alpha + 1) = c$

$b(2\cos 2\alpha + 1) = c \quad / : b$

$2\cos 2\alpha + 1 = \frac{c}{b}$

$2\cos 2\alpha = \frac{c}{b} - \frac{b}{b} \quad / : 2$

$\cos 2\alpha = \frac{c-b}{2b}$ $\quad$ c.n.d

Paulina od Matematyki

Zadania

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD}$

$\vec{AD} = [15,8] + [-21,-7] = [-6,1]$

$|AD| = \sqrt{(-6)^2+1^2} = \sqrt{37}$

$|AB| = \sqrt{15^2+8^2} = \sqrt{289} = 17$

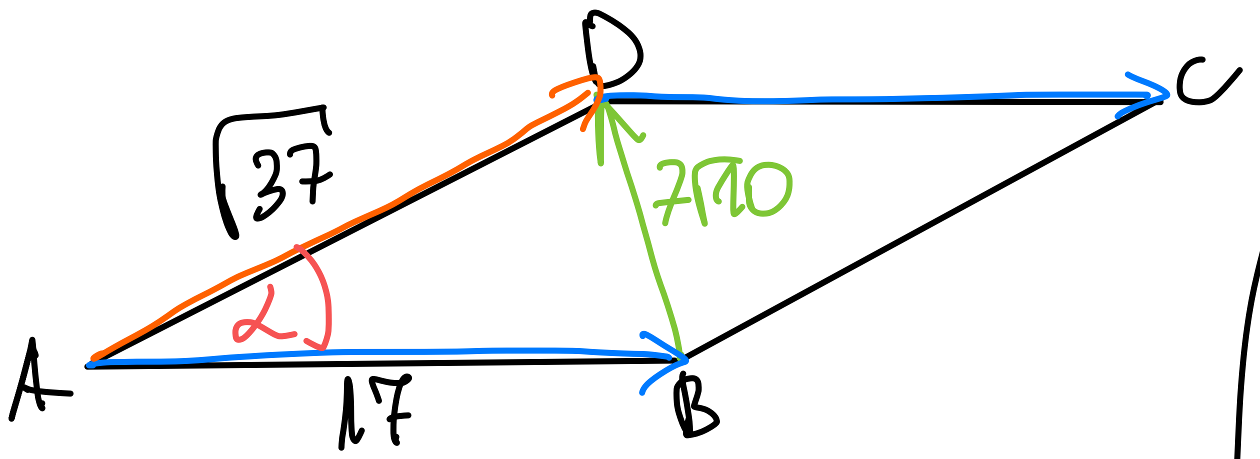
Zadanie 24. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21,-7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15,8]$.

$\vec{DC} = \vec{AB}$

Oblicz pole tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

$|BD| = \sqrt{21^2+7^2} = \sqrt{490} = 7\sqrt{10}$



$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$

$(7\sqrt{10})^2 = \sqrt{37}^2 + 17^2 - 2\cdot\sqrt{37}\cdot 17\cdot\cos\alpha$

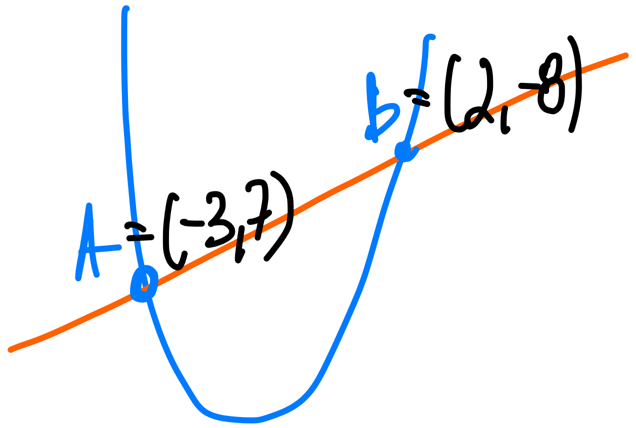
$\cos\alpha = \frac{82}{-17\sqrt{37}}$

$\sin\alpha = \frac{63}{17\sqrt{37}}$

$P = \cancel{17\cdot\sqrt{37}}\cdot\frac{63}{\cancel{17\sqrt{37}}} = 63$

Paulina od Matematyki

Zadania



$$\begin{cases} 3x+y+2=0 \\ y=x^2-2x-8 \end{cases}$$

$x^2+x-6=0$

$\Delta=1+24=25$

$A: \ x_1=\frac{-1-5}{2}=-3 \quad x_2=\frac{-1+5}{2}=2$

$y_1=-3\cdot(-3)-2=7 \quad y_2=-6-2=-8$

Zadanie 11. (0–6)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta o równaniu $3x+y+2=0$ przecina parabolę o równaniu $y=x^2-2x-8$ w punktach A oraz B, które są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Wierzchołek A ma pierwszą współrzędną ujemną. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}x+1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią. Odległość punktu C od prostej zawierającej bok AB równoległoboku jest równa $\frac{9\sqrt{10}}{5}$.

$C=(x_c, -\frac{1}{2}x_c+1)$

$x_c>0$

Oblicz długość boku BC tego równoległoboku. Zapisz obliczenia.

$\frac{9\sqrt{10}}{5}=\frac{|3x_c-\frac{1}{2}x_c+1+2|}{\sqrt{3^2+1^2}} \ /\cdot\sqrt{10}$

$18=|2\frac{1}{2}x_c+3|$

$2\frac{1}{2}x_c+3=18 \quad \vee \quad 2\frac{1}{2}x_c+3=-18$

$\frac{5}{2}x_c=15 \ /\cdot\frac{2}{5} \qquad \frac{5}{2}x_c=-21 \ /\cdot\frac{2}{5}$

$x_c=6 \qquad x_c=-\frac{42}{5}\notin D$

$x_c=6$

$y_c=-2$

$C=(6,-2)$

$|BC|=\sqrt{16+36}=2\sqrt{13}$

Zadania

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad / \cdot 2$

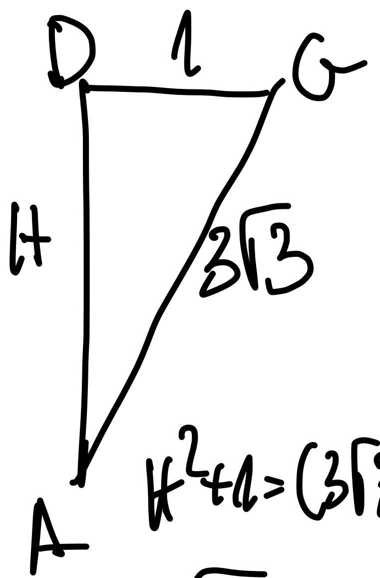
$2\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

$a = 2$

Zadanie 12. (0-4)

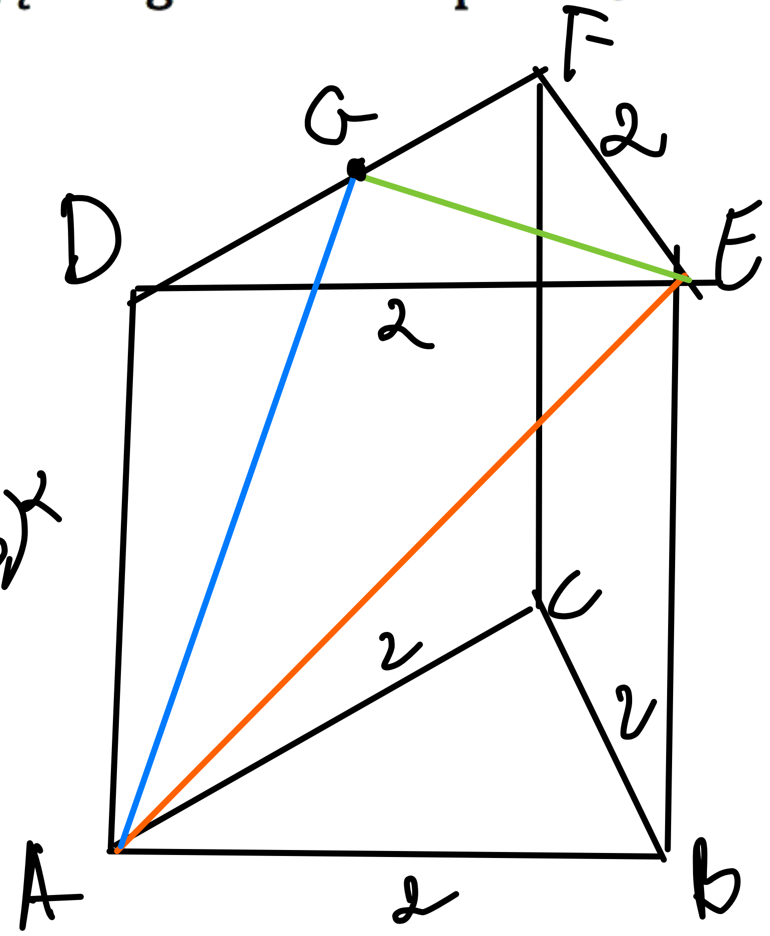
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC oraz DEF. Kąt α jest kątem pomiędzy ścianą boczną $ACFD$ tego graniastosłupa i przekątną AE ściany bocznej $ABED$. Wiadomo, że $tg\ \alpha = \frac{1}{3}$ oraz $|AE| = \sqrt{30}$.

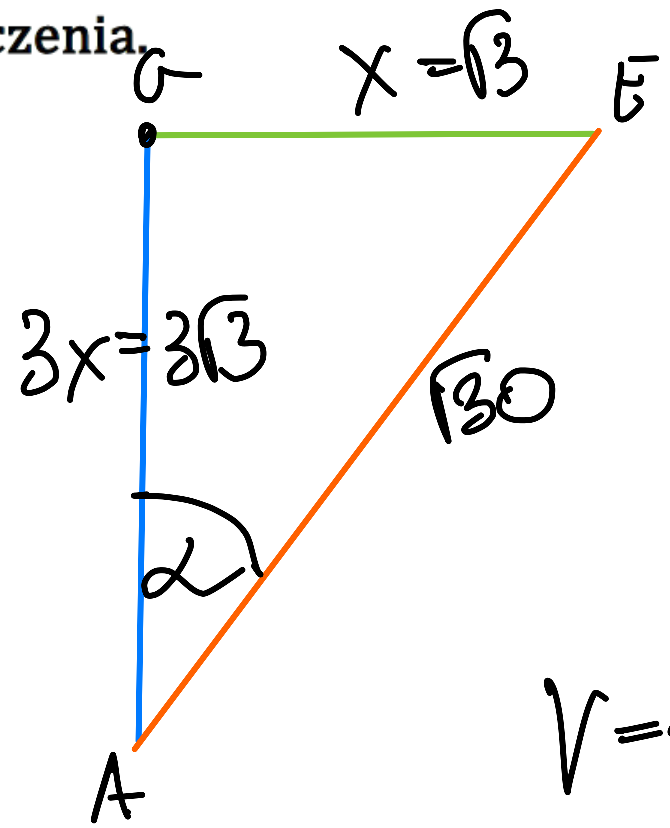
Oblicz objętość graniastosłupa $ABCDEF$. Zapisz obliczenia.



$H^2 + 1 = (3\sqrt{3})^2$

$H = \sqrt{26}$





$tg\alpha = \frac{1}{3}$

$x^2 + (3x)^2 = \sqrt{30}^2$

$10x^2 = 30$

$x^2 = 3 \qquad x > 0$

$x = \sqrt{3}$

$V = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{26} = \sqrt{78}$

Paulina od Matematyki

Zadania

Tw. Pitagorasa $\triangle AEC$

$|AE|^2+4^2=\sqrt{137}^2$

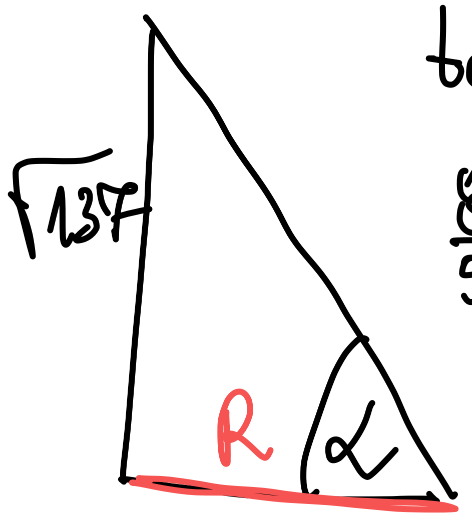
$|AE|=11$

$V=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{11\cdot 4}_{P_{\square}}\cdot\sqrt{137}=\frac{44\sqrt{137}}{3}$

Zadanie 13. (0-6)

Podstawą ostrosłupa jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Wysokość tego trapezu ma długość 4, a ponadto $|BC|=5$. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem α takim, że $tg\,\alpha=\frac{8}{5}$. Wysokość tego ostrosłupa ma długość równą $\sqrt{137}$.

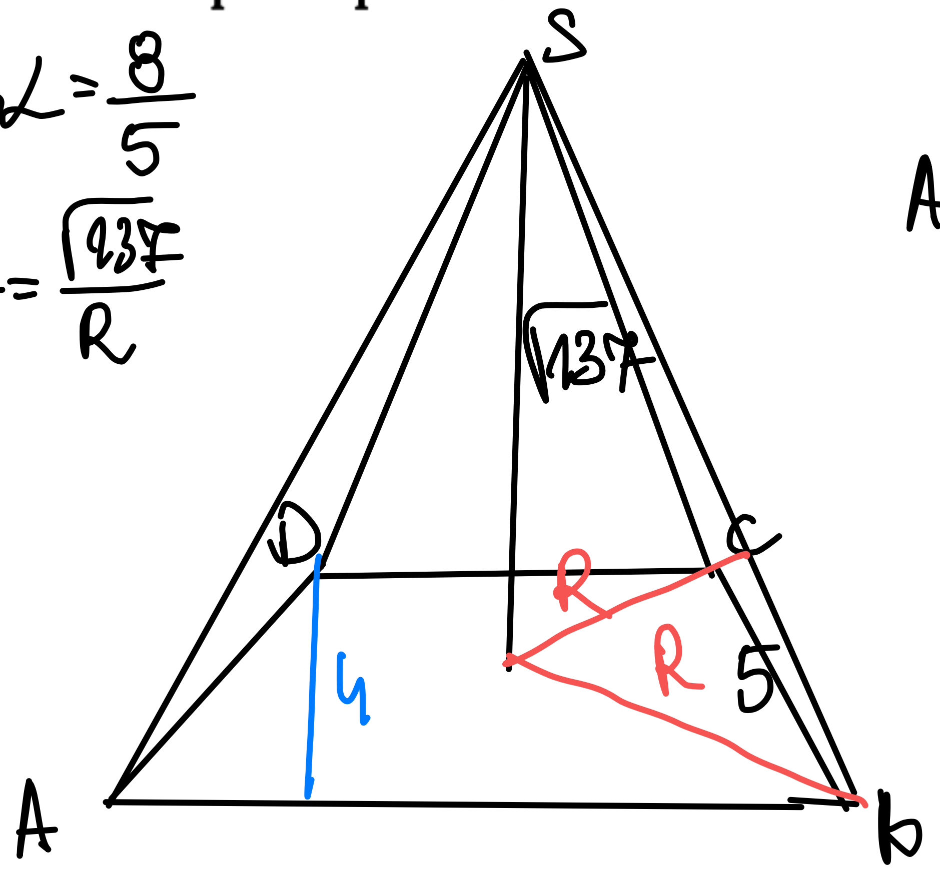
Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

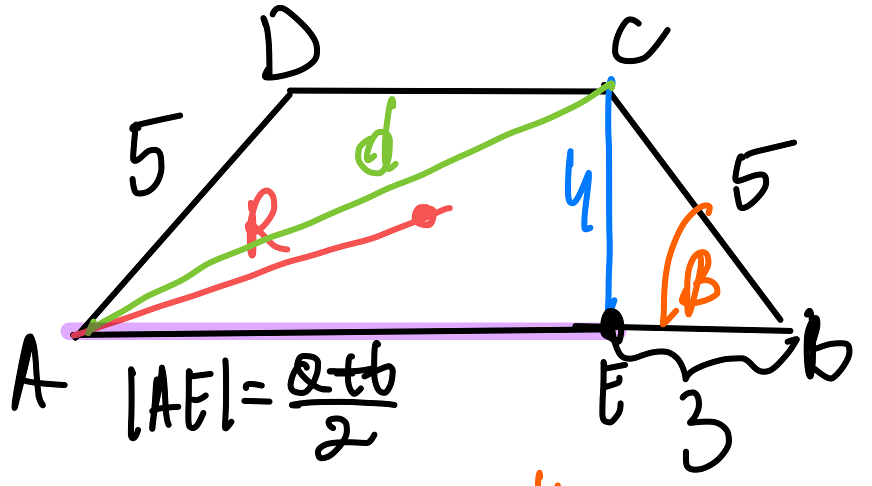


$tg\,\alpha=\frac{8}{5}$

$\frac{8}{5}=\frac{\sqrt{137}}{R}$

$R=\frac{5\sqrt{137}}{8}$





$|AE|=\frac{a+b}{2}$

$R=\frac{5\sqrt{137}}{8}$

$\sin\beta=\frac{4}{5}$

Tw. sin $\triangle ABC$

$\frac{d}{\sin\beta}=2R$

$\frac{d}{\frac{4}{5}}=\frac{10\sqrt{137}}{8}$

$8d=8\sqrt{137}$

$d=\sqrt{137}$

Paulina od Matematyki

Prawdopodobieństwo i optymalizacja

Zadania

Zadanie 9. (0-4)

Tegoroczny maturzysta, Marek, postanowił zdawać egzamin maturalny z matematyki oraz z fizyki na poziomie rozszerzonym. Zdecydował, że będzie rozwiązywał zadania ze zbioru, który zawiera pewną liczbę zadań, z których 70% to zadania z matematyki, a 30% - zadania z fizyki. Zadania z obu przedmiotów są wymieszane, a ich kolejność jest losowa. Marek postanowił wylosować kilka zadań ze zbioru.

Oblicz minimalną liczbę zadań, jakie powinien wylosować Marek tak, aby prawdopodobieństwo tego, że wylosuje przynajmniej jedno zadanie z matematyki było większe od 99%. Zakładamy, że jedno, konkretne zadanie może być wylosowane wielokrotnie.

$n=n$
$p=0{,}7$
$q=0{,}3$
$k=0$

$(0{,}3)^4=0{,}0081$

A' — Marek nie wylosuje żadnego zad. z matematyki

$P(A') = P_n(0) = \binom{n}{0}\cdot(0{,}7)^0\cdot(0{,}3)^{n-0} = (0{,}3)^n$

$P(A)+P(A')=1$

$P(A)=1-P(A')$

$P(A)>0{,}99$

$1-(0{,}3)^n>0{,}99$

$-(0{,}3)^n>-0{,}01 \quad /\cdot(-1)$

$(0{,}3)^n<0{,}01$

$n>4$

Odp. Min. 4 zadanie

Zadania

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

Zadania

Zadanie 14.

Rozpatrujemy wszystkie walce o objętości równej 686.

Zadanie 14.1. (0-2)

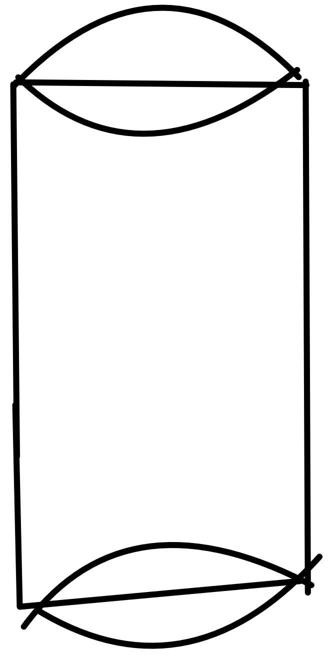
Wykaż, że pole powierzchni całkowitej P każdego z rozważanych walców w zależności od długości r promienia podstawy walca jest określone wzorem

$$P(r) = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{686}{\pi r}\right)$$

$$P_c = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot H$$

$$P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi \cancel{r} \cdot \frac{686}{\pi r^{\cancel{2}}}$$

$$P(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{686}{\pi r}\right)$$



$$V = \pi r^2 \cdot H = 686$$

$$H = \frac{686}{\pi r^2}$$

Paulina od Matematyki

Zadania

$$P\left(\frac{7}{\sqrt[3]{\pi}}\right)=2\pi\cdot\frac{\cancel{\pi}\cdot\frac{343}{\cancel{\pi}}+686}{\cancel{\pi}\cdot\frac{7}{\sqrt[3]{\pi}}}=\frac{2058}{\frac{7}{\sqrt[3]{\pi}}}=294\sqrt[3]{\pi}$$

Zadanie 14.2. (0-4)

Pole powierzchni całkowitej P walca w zależności od długości r promienia podstawy walca jest określone wzorem

$$P(r) = 2\pi \cdot \left(r^2 + \frac{686}{\pi r}\right)$$

$$P(r)=2\pi\cdot\frac{\pi r^3+686}{\pi r}$$

dla $r > 0$.

Wyznacz długość promienia podstawy tego z rozpatrywanych walców, którego pole powierzchni całkowitej jest możliwie najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole. Zapisz obliczenia.

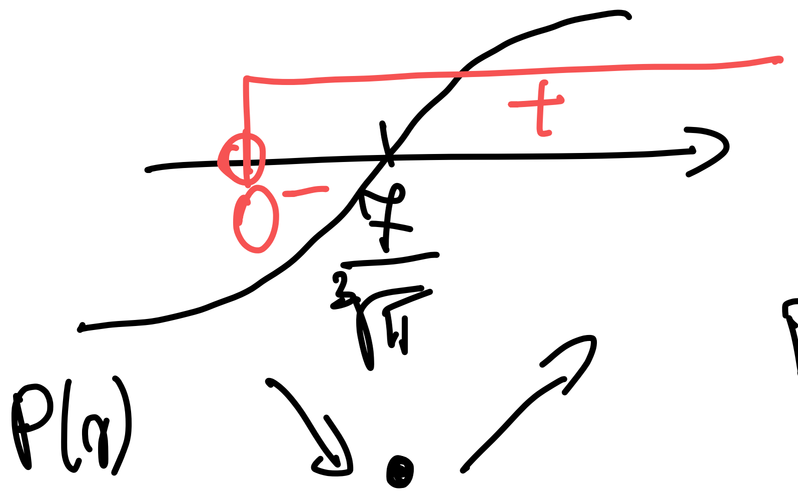
$$P'(r)=2\pi\cdot\frac{3\pi r^2\cdot\pi r-\pi(\pi r^3+686)}{\pi^2r^2}=\frac{3\pi^2r^3-\pi^2r^3-686\pi}{\pi^2r^2}=\frac{2\pi^2r^3-686\pi}{\pi^2r^2}$$

$$2\pi^2r^3-686\pi=0 \quad /:2\pi^2$$

$$r^3-\frac{343}{\pi}=0$$

$$r^3=\frac{343}{\pi} \quad /\sqrt[3]{\ }$$

$$r=\frac{7}{\sqrt[3]{\pi}}$$



P_{min} dla $r=\frac{7}{\sqrt[3]{\pi}}$

Paulina od Matematyki

Practice makes PROGRESS

Czy czujecie się pewniej?

Paulina od Matematyki

GOOD LUCK

Powodzenia na maturze!

Paulina od Matematyki

Znajdziesz mnie tutaj:

Paulina od Matematyki

paulina@skutecznekorepetycje.com

www.paulinaodmatematyki.com