Próbna matura Poziom Podstawowy Grudzień 2025/2026 – SCHEMAT OCENIANIA

Paulina od Matematyki

Zadanie 1. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\frac{2^{61}+4^{31}+8^{21}}{4^{31}}$ jest równa

A. $2^{61}+8^{21}$ B. 3,5 C. 2^{124} D. 3

Odpowiedź: B

Zadanie 2. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $|4-2\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-2|$ jest równa

A. $6-3\sqrt{3}$ B. $2-3\sqrt{3}$

C. $6+\sqrt{3}$ D. $2-\sqrt{3}$

Odpowiedź D

Zadanie 3. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba $\log_{3\sqrt{2}} 18$ jest równa

A. $3\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{6}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

Odpowiedź: C

Zadanie 4. (0-1)

Klient wpłacił pewną kwotę na lokatę długoterminową z roczną kapitalizacją odsetek. Po każdym rocznym okresie oszczędzania, bank dolicza odsetki w wysokości 3,5% od kwoty bieżącego kapitału, znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym. Po upływie dwóch lat, kwota na tej lokacie była równa 35136,18 zł wraz z odsetkami (bez uwzględniania podatków).

Uzupełnij zdanie. Wpisz właściwą liczbę w wykropkowanym miejscu tak, aby zdanie było prawdziwe.

Kwota wpłacona przez klienta na lokatę była równa .... zł.

Odpowiedź: 32 800 zł

Zadanie 5. (0-2)

Liczba całkowita a przy dzieleniu przez 3 daje resztę równą 2.

Wykaż, że liczba $a^2 - 4a$ przy dzieleniu przez 9 daje resztę równą 5. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

1p – zapisanie, że $a = 3n + 2 \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$ oraz przekształcenie wyrażenia $a^2 - 4a$ do postaci $9n^2 - 4$

$$a = 3n + 2$$

$$a^2 - 4a = (3n + 2)^2 - 4(3n + 2) = 9n^2 - 4$$

2p – uzasadnienie, że otrzymana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę równą 5

$$9n^2 - 4 = 9(n^2 - 1) + 5 = 9 \cdot x + 5$$

gdzie $x = n^2 - 1$, oczywiście skoro $n \in \mathbb{Z}$ to również $x \in \mathbb{Z}$. Zatem otrzymana liczba przy dzieleniu przez 9 daje resztę 5.

c.n.d.

Zadanie 6. (0-1)

Dane są liczby rzeczywiste a , b oraz c takie, że

$$a = \left(2 - \sqrt{3}\right)^2 \qquad b = \left(\sqrt{3} - 2\right)^2 \qquad c = \left(-2\sqrt{3}\right)^2$$

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeżeli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeżeli jest fałszywe.

Liczba a jest większa niż liczba b.	P	F
Spośród liczb a , b , c najmniejsza jest liczba c.	P	F

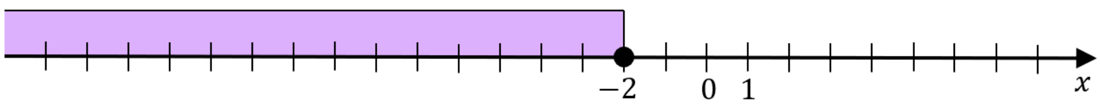
Odpowiedź: FF

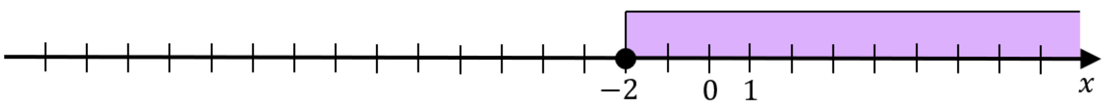
Zadanie 7. (0-1)

Dana jest nierówność

$$\frac{4 - 4x}{4} + \frac{2 - 2x}{2} \leq 2x + 10$$

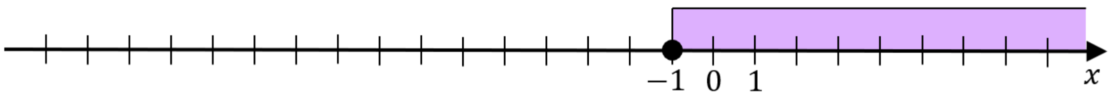
Na którym rysunku poprawnie zaznaczono na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych spełniających powyższą nierówność? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A.


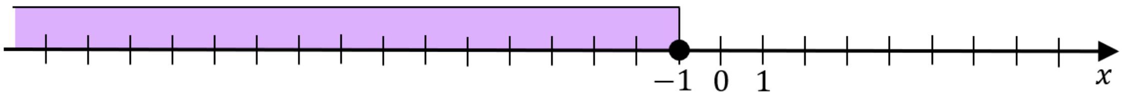


B.

C.



D.



Odpowiedź: B

Zadanie 8. (0-3)

Rozwiąż równanie

$$\frac{x-1}{2x+1}=\frac{8}{6x+3}$$

Zapisz konieczne założenia i obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{x=\frac{11}{3}}$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie założenia $x \neq -\frac{1}{2}$ albo dziedziny równania D: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$2x+1 \neq 0 \qquad \wedge \qquad 6x+3 \neq 0$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

Możemy więc zapisać dziedzinę równania: D: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2p – przekształcenie danego równania wymiernego do równania kwadratowego

$$\frac{x-1}{2x+1}=\frac{8}{6x+3}$$

$$(x-1)(6x+3)=8(2x+1)$$

$$6x^2-19x-11=0$$

3p – rozwiązanie otrzymanego równania i podanie odpowiedzi uwzględniając założenia

$$x_1=-\frac{1}{2} \notin D \qquad x_2=\frac{11}{3}$$

Ponieważ $x \neq -\frac{1}{2}$, to jedynym rozwiązaniem równania jest liczba $x=\frac{11}{3}$.

Zadanie 9. (0-1)

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności

$$-2(x+3)(x-4) \geq 0$$

jest przedział ……………………………………….. .

Odpowiedź: $[\mathbf{-3, 4}]$

Zadanie 10. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

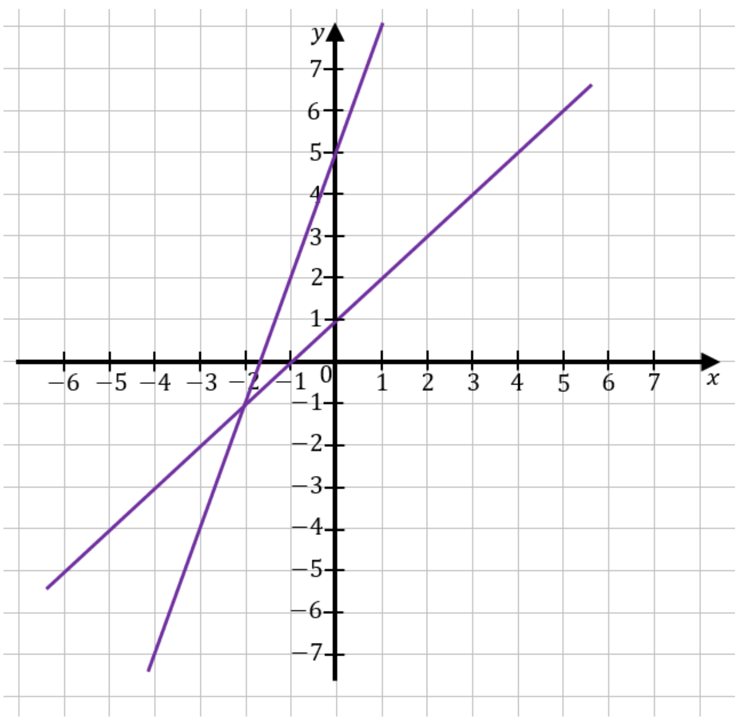
Rozwiązaniem równania $x(x^2+9)(x^2-1)=0$ <u>nie</u> jest liczba

A. 0 B. 1 C. (-1) D. (-3)

Odpowiedź: D

Zadanie 11. (0-1)

Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), przedstawiono interpretację geometryczną jednego z poniższych układów równań A—D.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Układem równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku jest

A. $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

Odpowiedź B

Zadanie 12. (0-1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = 2^{-x} - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Dla argumentu 2 funkcja f przyjmuje wartość

A. (-5) B. $\left(-\frac{1}{2}\right)$ C. $\left(-\frac{3}{4}\right)$ D. (-1)

Odpowiedź: C

Zadanie 13. (0-1)

Funkcja f jest określona za pomocą tabeli

x	-2	-1	0	1	2	3
y	1	0	3	4	3	0

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdziwe jest stwierdzenie:

A. funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe.

B. dla argumentu 1, funkcja f przyjmuje wartość (-2).

C. funkcja f jest określona dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

D. suma największej oraz najmniejszej wartości funkcji f jest równa 4.

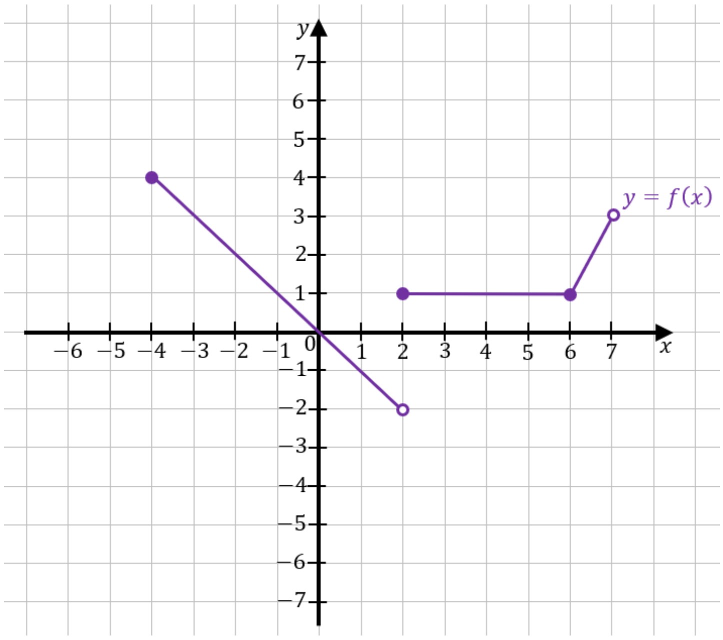
Odpowiedź: D

Zadanie 14.

Funkcja f jest określona następująco:

$$f(x) = \begin{cases} -x & dla \quad x \in [-4,2) \\ 1 & dla \quad x \in [2,6) \\ 2x - 11 & dla \quad x \in [6,7) \end{cases}$$

Wykres funkcji $y = f(x)$ przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku poniżej.



Zadanie 14.1. (0-3)

Uzupełnij zdania. Wpisz odpowiednie przedziały w wykropkowanych miejscach, aby zdania były prawdziwe.

Odpowiedzi:

1. Dziedziną funkcji f jest przedział $[\mathbf{-4}, \mathbf{7})$.

2. Zbiorem wartości funkcji f jest przedział $(\mathbf{-2}, \mathbf{4}]$.

3. Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości nie większe niż 1 jest przedział $[\mathbf{-1}, \mathbf{6}]$.

Zadanie 14.2. (0-1)

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeżeli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeżeli jest fałszywe.

Równanie $f(x) = 3$ ma dokładnie dwa różne rozwiązania.	P	F
Suma $f(2) + f(-2)$ jest równa 3.	P	F

Odpowiedź: FP

Zadanie 14.3. (0-1)

Funkcja $y = g(x)$ jest określona następująco

$$g(x) = f(x) - 1$$

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Odpowiedź:

Zbiorem wszystkich dodatnich miejsc zerowych funkcji g jest przedział $[\mathbf{2}, \mathbf{6}]$.

Zadanie 15. (0-1)

Funkcja liniowa f jest określona wzorem

$$f(x) = 2x - 5$$

Wykresem tej funkcji jest prosta przechodząca przez punkt $A = (m - 2\,, 3)$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

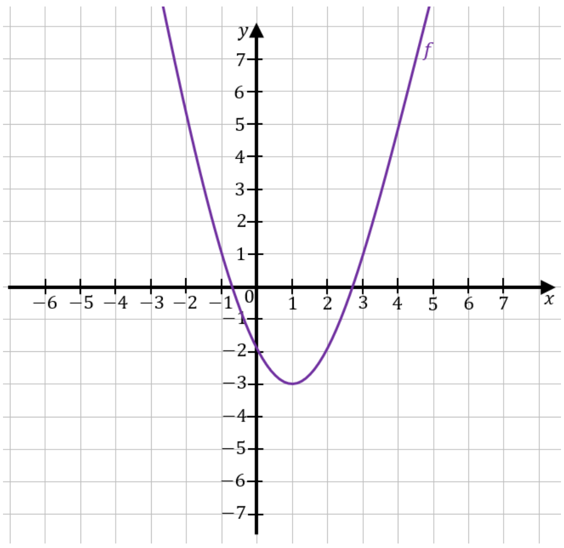
Liczba m jest równa

A. 6 B. (-3) C. 5 D. 3

Odpowiedź: A

Zadanie 16.

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej $y = f(x)$



Wierzchołek paraboli, która jest wykresem tej funkcji ma obie współrzędne całkowite. Liczba $1 - \sqrt{3}$ jest jednym z miejsc zerowych funkcji f.

Zadanie 16.1. (0-2)

Wyznacz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{f(x) = (x-1)^2 - 3}$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie wzoru funkcji f w postaci $f(x) = a(x-1)^2 - 3$

Z wykresu odczytujemy współrzędne wierzchołka paraboli: $W = (1, -3)$. Pierwsza współrzędna wierzchołka jest równa $p = 1$, a druga $q = -3$. Zapisujemy postać kanoniczną:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$f(x) = a(x-1)^2 - 3$$

2p – obliczenie a i podanie wzoru funkcji f

Jeśli liczba $x = 1 - \sqrt{3}$ jest miejscem zerowym funkcji f, to na wykresie tej funkcji leży punkt o współrzędnych $A = \left(1 - \sqrt{3}, 0\right)$. Możemy wiec zapisać:

$$0 = a\left(1 - \sqrt{3} - 1\right)^2 - 3$$

$$a = 1$$

Zatem $f(x) = (x-1)^2 - 3$.

Zadanie 16.2. (0-1)

Prosta l o równaniu $y = m$ ma z parabolą, która jest wykresem funkcji f dokładnie dwa punkty wspólne.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba m należy do przedziału

A. $(-\infty, -3)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(-3, \infty)$

D. $(-1, \infty)$

Odpowiedź: C

Zadanie 17. (0-1)

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma n początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu jest określona wzorem $S_n = (n+1)(n+2)$ dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$.

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeżeli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeżeli jest fałszywe.

Piąty wyraz ciągu (a_n) jest równy 12.	P	F
Dla dowolnej liczby naturalnej n suma S_n jest liczbą podzielną przez 2.	P	F

Odpowiedź: PP

Zadanie 18. (0-1)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego wyrazy spełniają warunek $a_{15} - a_{14} = 5$. Piąty wyraz tego ciągu jest równy (-2).

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyraz a_7 ciągu (a_n) jest równy

A. 3 B. 1 C. 8 D. (-7)

Odpowiedź: C

Zadanie 19. (0-1)

Trzywyrazowy ciąg $(x^2, 2, y^2)$ jest arytmetyczny.

Trzywyrazowy ciąg $(x, 1, y)$ jest geometryczny.

Liczby x oraz y są dodatnimi liczbami rzeczywistymi.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Suma $(x+y)^2$ jest równa

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Odpowiedź: D

Zadanie 20. (0-1)

Dany jest kąt $\alpha \in (0,180°)$ taki, że $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

Dokończ zdanie. Wybierz odpowiedź A albo B oraz odpowiedź 1, 2 albo 3.

Kąt α jest

<table>
<tr><td rowspan="3">A</td><td rowspan="3">ostry</td><td rowspan="6">a jego sinus jest równy</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">$\frac{3}{4}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">$\left(-\frac{3}{4}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">B</td><td rowspan="3">rozwarty</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">$\frac{9}{16}$</td></tr>
<tr></tr>
</table>

Odpowiedź: B1

Zadanie 21. (0-1)

Dany jest kąt ostry α taki, że spełniona jest równość $\frac{tg\,\alpha}{\sin\alpha} = 2$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

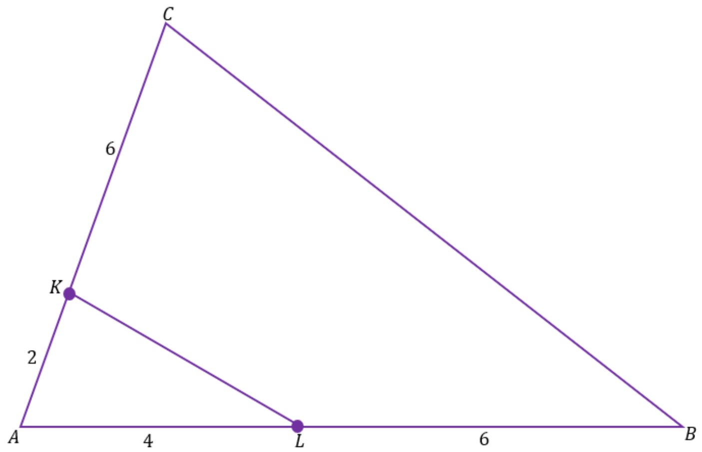
Kąt α ma miarę

A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

Odpowiedź: D

Zadanie 22. (0-3)

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na bokach AB oraz AC tego trójkąta leżą – odpowiednio punkty L oraz K w taki sposób, że $|AL| = 4$, $|AK| = 2$ oraz $|LB| = |KC| = 6$ (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe $15\sqrt{7}$.

Oblicz długość odcinka KL. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $|KL| = 3\sqrt{2}$

Rozwiązanie:

Niech α oznacza miarę kąta BAC.

1p – obliczenie sinusa kąta α

$$P_{ABC} = 15\sqrt{7}$$

$$\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha = 15\sqrt{7}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot\sin\alpha = 15\sqrt{7}$$

$$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

2p – obliczenie cosinusa kąta α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{8} \quad , \quad bo\ \ \alpha\ jest\ kątem\ ostrym$$

3p – obliczenie długości odcinka KL

Niech $|KL| = x$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ALK mamy:

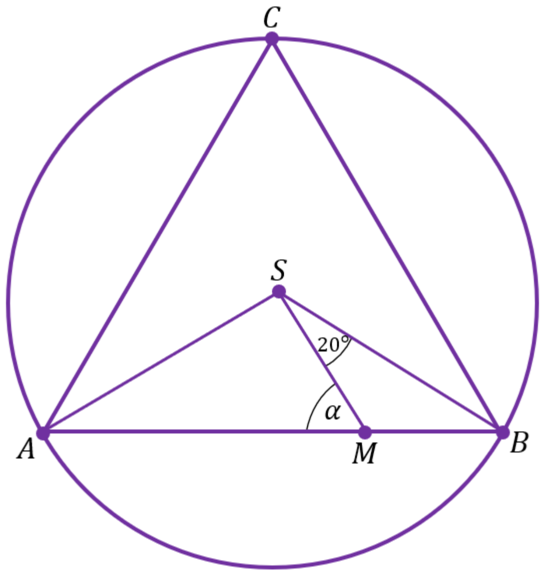
$$x^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos\alpha$$

$$x^2 = 4 + 16 - 16\cdot\frac{1}{8}$$

$$x = 3\sqrt{2}$$

Zadanie 23. (0-1)

Na trójkącie równobocznym ABC opisano okrąg o środku w punkcie S. Na boku AB tego trójkąta leży punkt M w taki sposób, że $|\sphericalangle MSB| = 20°$. Kąt AMS ma miarę α (zobacz rysunek).



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miara kąta α jest równa

A. 40° B. 45° C. 50° D. 60°

Odpowiedź: C

Zadanie 24. (0-1)

Czworokąty C_1 i C_2 są podobne. Obwód czworokąta C_1 jest równy 24, a pole tego czworokąta – jest równe 18. Pole czworokąta C_2 jest równe 162.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Obwód czworokąta C_2 jest równy

A. 72 B. 162 C. 54 D. 216

Odpowiedź: A

Zadanie 25. (0-1)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dane są proste l oraz k, określone równaniami

$$l: \quad y = 2x - 5$$

$$k: \quad y = (5 - 2m)x - m^2$$

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Proste l oraz k <u>nie</u> mają punktów wspólnych, jeżeli liczba m jest równa

A. (-2) B. 2 C. 1,5 D. $(-1{,}5)$

Odpowiedź: C

Zadanie 26. (0-2)

Okrąg O jest określony równaniem

$$O: \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

Funkcja kwadratowa f jest określona dla dowolnej liczby rzeczywistej x, wzorem

$$f(x) = (x-5)^2$$

Uzupełnij zdania. Wybierz <u>dwie</u> właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A-F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Prawdziwe są stwierdzenia …………… oraz …………… .

A. Okrąg O jest styczny do osi Oy kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y).

B. Okrąg O jest styczny do prostej, która jest osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej f.

C. Na okręgu O leży punkt o współrzędnych $(5,3)$.

D. Środek okręgu O leży na prostej o równaniu $y = x + 5$.

E. Okrąg o równaniu $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ jest obrazem okręgu O w symetrii środkowej względem początku kartezjańskiego układu współrzędnych (x,y).

F. Okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y+3)^2=9$ jest obrazem okręgu O w symetrii osiowej względem osi Oy kartezjańskiego układu współrzędnych (x,y).

Odpowiedź: BF

Zadanie 27. (0-2)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x,y) dany jest trójkąt ABC, w którym $A=(3,4)$ oraz $B=(-5,-2)$. Punkt C leży na osi Oy układu współrzędnych oraz na prostej o równaniu $y=20x+7$. Prosta k zawiera środkową trójkąta ABC poprowadzoną z wierzchołka A.

Wyznacz równanie prostej k w postaci kierunkowej. Zapisz obliczenia

Odpowiedź: $y=\frac{3}{11}x+3\frac{2}{11}$

Rozwiązanie:

1p – podanie współrzędnych punktu C oraz obliczenie współrzędnych środka boku BC trójkąta ABC

S– środek odcinka BC

$$C=(0,7)$$

$$S=\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)=\left(\frac{-5+0}{2},\frac{-2+7}{2}\right)=\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$$

2p – wyznaczenie równania prostej k w postaci kierunkowej

$$k:\quad y=ax+b$$

Prosta k przechodzi przez punkty A oraz S, zatem:

$$a=\frac{y_S-y_A}{x_S-x_a}=\frac{\frac{5}{2}-4}{-\frac{5}{2}-3}=\frac{3}{11}$$

$$k:\quad y=\frac{3}{11}x+b$$

Podstawiając współrzędne punktu $A=(3,4)$ do równania tej prostej, otrzymujemy:

$$4=\frac{3}{11}\cdot 3+b$$

$$b=3\frac{2}{11}$$

Otrzymane równanie prostej ma więc postać:

$$k: \quad y = \frac{3}{11}x + 3\frac{2}{11}$$

Zadanie 28. (0-1)

Podstawą graniastosłupa prawidłowego G jest n-kąt foremny, a podstawą ostrosłupa prawidłowego O jest n-kąt foremny.

Liczba wszystkich krawędzi graniastosłupa G jest równa 60.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Liczba wszystkich wierzchołków ostrosłupa O jest równa

A. 61 B. 21 C. 31 D. 30

Odpowiedź: 21

Zadanie 29. (0-1)

Każda krawędź ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość równą 4.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wysokość tego ostrosłupa ma długość

A. $2\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{3}$

Odpowiedź: A

Zadanie 30. (0-1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 3, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie dwie cyfry 7, jest

A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

Odpowiedź: C

Zadanie 31. (0-1)

W pewnej grupie 28 uczniów przeprowadzono badanie dotyczące liczby godzin, jakie dziennie przeznaczają oni na korzystanie z social mediów. Wyniki tego badania przedstawiono w poniższej tabeli.

Liczba godzin	2	2,5	3	3,5	4	4,5
Liczba uczniów, którzy wskazali daną liczbę godzin	3	6	4	1	10	4

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Mediana liczby godzin poświęcanych dziennie przez tych uczniów na korzystanie z social mediów jest równa ……………………… .

Odpowiedź: $\boldsymbol{3,75\ h}$

Zadanie 32. (0-2)

Ze zbioru $K = \{1,3,5,7\}$ losujemy liczbę x, a następnie ze zbioru $M = \{2,4,6\}$ – losujemy liczbę y.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia $\boldsymbol{A}$ polegającego na tym, że średnia arytmetyczna liczb $\boldsymbol{(x+y)}$ oraz $\boldsymbol{(x \cdot y)}$ jest większa niż 20. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{6}}$

Rozwiązanie:

1p – wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega|$

Liczbę x możemy wylosować na 4 sposoby, a liczbę y na 3 sposoby, zatem:

$$|\Omega| = 4 \cdot 3 = 12$$

2p – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia A

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki losowania spełniające warunek, że średnia arytmetyczna liczb $(x+y)$ oraz $(x \cdot y)$ jest większa niż 20

$$A = \{(5,6), (7,6)\}$$

Zatem

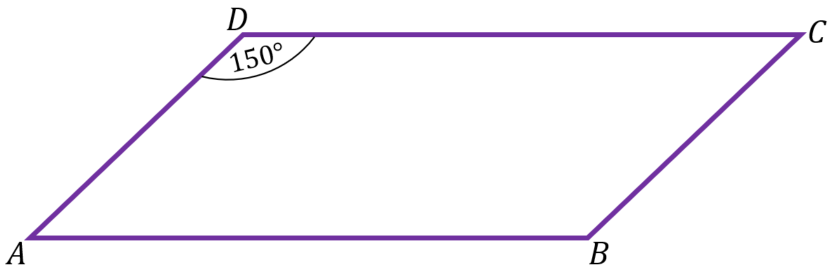
$$|A| = 2$$

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Zadanie 33. (0-4)

Dany jest równoległobok $ABCD$, którego obwód jest równy 48, a miara kąta ADC tego równoległoboku jest równa 150° (zobacz rysunek).



Rozważamy wszystkie ostrosłupy proste $ABCDS$, których podstawą jest równoległobok $ABCD$, a wysokość ostrosłupa ma długość równą 6.

Niech $V(x)$ oznacza funkcję objętości takiego ostrosłupa w zależności od długości x krawędzi AB podstawy ostrosłupa.

Wyznacz wzór i dziedzinę funkcji V. Oblicz długość x krawędzi AB tego z rozważanych ostrosłupów, którego objętość jest możliwie największa. Oblicz tę największą objętość. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź:

1. $\boldsymbol{V(x) = -x^2 + 24x}$
2. $\boldsymbol{D:\quad x \in (0, 24)}$
3. **największa objętość:** $\boldsymbol{V = 144 \text{ dla } x = 12}$

Rozwiązanie:

x – długość boku AB równoległoboku $ABCD$

y – długość boku AD równoległoboku $ABCD$

1p – wyznaczenie zależności wiążącej wielkości x oraz y, np. $y = 24 - x$

Obwód równoległoboku jest równy 48, stąd:

$$2x + 2y = 48$$

$$y = 24 - x$$

2p – wyznaczenie wzoru funkcji opisującej objętość ostrosłupa i podanie dziedziny tej funkcji

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot x \cdot y \cdot \sin 30° \cdot 6 = x(24 - x) = -x^2 + 24x$$

Wzór funkcji V opisującej objętość ostrosłupa w zależności od x ma postać:

$$V = -x^2 + 24x$$

Wyznaczamy dziedzinę:

$$x > 0 \quad \wedge \quad y > 0$$

$$x > 0 \quad \wedge \quad 24 - x > 0$$

$$x > 0 \quad \wedge \quad x < 24$$

$$D: \quad x \in (0,24)$$

3p – obliczenie długości x krawędzi AB ostrosłupa, dla której jego objętość jest największa

Wykresem funkcji V jest fragment paraboli ramionami skierowanej w dół, zatem ta funkcja przyjmuje największą wartość „w wierzchołku”. Wyznaczamy jego pierwszą współrzędną (wartość x dla której funkcja V osiąga wartość największą):

$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-24}{-2} = 12$$

Objętość ostrosłupa jest więc największa dla $x = 12$.

4p – obliczenie największej możliwej objętości ostrosłupa

Największa objętość ostrosłupa jest równa:

$$V(12) = -12^2 + 24 \cdot 12 = 144$$

Odpowiedź: Objętość ostrosłupa jest największa dla $x = 12$ i wynosi 144.