Próbna matura Poziom Rozszerzony Grudzień 2025/2026 – SCHEMAT OCENIANIA

Paulina od Matematyki

Zadanie 1. (0-2)

Proces ładowania pewnego urządzenia przebiega zgodnie z zależnością

$$Q(t) = \begin{cases} 100 \cdot (1 - k^t) & dla \quad t \in [0,3) \\ 87{,}5 + 4 \cdot \log_2(t-2) & dla \quad t \in [3, \infty) \end{cases}$$

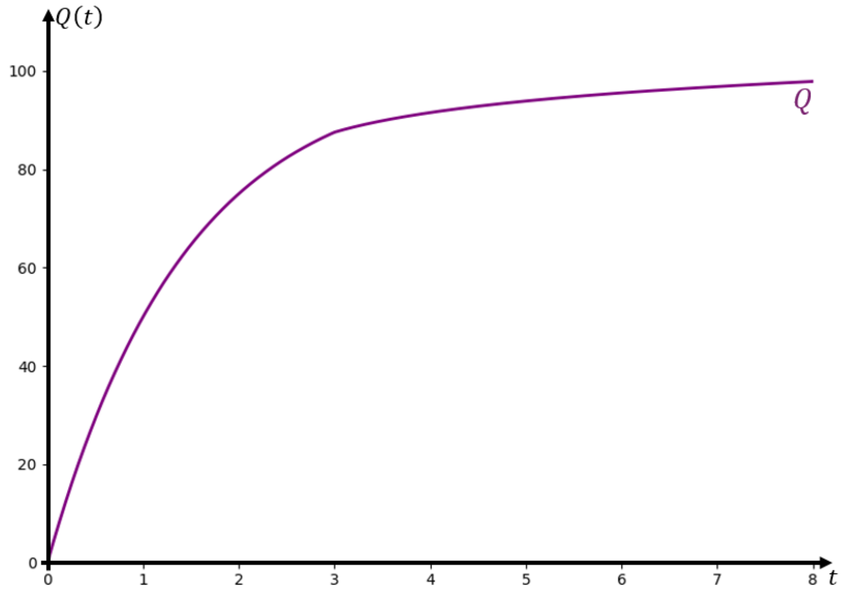
gdzie

$Q(t)$ – poziom naładowania urządzenia (wyrażony w procentach)

t – czas, który upłynął od momentu rozpoczęcia ładowania (wyrażony w godzinach)

k – współczynnik liczbowy

Rozpoczęto proces ładowania tego urządzenia, który przebiegał zgodnie z zależnością Q. Wykres tej zależności przedstawiono na poniższym wykresie:



Funkcja $Q(t)$ jest ciągła.

Oblicz poziom naładowania urządzenia po 2,5 godziny od rozpoczęcia procesu ładowania. Wynik zapisz w procentach, z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $82{,}32\%$

Rozwiązanie:

1p – obliczenie wartości współczynnika k

Funkcja $Q(t)$ jest ciągła, zatem wartości wyrażeń $100 \cdot (1 - k^t)$ oraz $87{,}5 + 4 \cdot \log_2(t-2)$ dla $t = 3$ są równe:

$$100(1 - k^3) = 87{,}5 + 4 \cdot \log_2(3-2)$$

$$k = \frac{1}{2}$$

2p – obliczenie poziomu naładowania urządzenia po 2,5 godziny od rozpoczęcia ładowania

$$Q(2{,}5) = 100(1 - k^{2{,}5}) = 100\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right) = 100\left(1 - \sqrt{\frac{1}{32}}\right) \approx 82{,}32\%$$

Zadanie 2. (0-2)

Prosta o równaniu $y = 18x - 27$ jest styczna do wykresu funkcji f, określonej wzorem

$$f(x) = 3x^3 + mx^2 + kx + 1$$

w punkcie o pierwszej współrzędnej równej 2.

Oblicz k oraz m. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{k = 2}$, $\boldsymbol{m = -5}$

Rozwiązanie:

1p – obliczenie pochodnej funkcji f oraz wyznaczenie dowolnej zależności wiążącej k i m, np. $4m + k = -18$

$$f'(x) = 9x^2 + 2mx + k$$

Prosta $y = 18x - 27$ jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie o pierwszej współrzędnej $x_0 = 2$, stąd mamy:

$$f'(x_0) = a$$

$$f'(2) = 18$$

$$9 \cdot 2^2 + 2m \cdot 2 + k = 18$$

$$4m + k = -18$$

2p – obliczenie k oraz m

$P = (2, y_0)$ – punkt styczności prostej $y = 18x - 27$ do wykresu funkcji f

Ponieważ punkt P leży na prostej o równaniu $y = 18x - 27$, to mamy:

$$y_0 = 18 \cdot 2 - 27 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 9$$

Zatem $P = (2{,}9)$. Punkt P leży na wykresie funkcji f, zatem możemy zapisać:

$$f(x) = 3x^3 + mx^2 + kx + 1$$

$$9 = 3 \cdot 2^3 + m \cdot 2^2 + k \cdot 2 + 1$$

$$4m + 2k = -16 \quad \Rightarrow \quad 2m + k = -8$$

Rozwiązujemy układ równań złożony z dwóch otrzymanych równań:

$$\begin{cases} 4m + k = -18 \\ 2m + k = -8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k = 2 \\ m = -5 \end{cases}$$

Zadanie 3. (0-3)

Niech $a = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5}$.

Wykaż, że

$$log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100 = \frac{4a+6}{3}$$

Rozwiązanie:

1p – poprawne zastosowanie (co najmniej raz) wzoru: $\log_a b \cdot \log_b c = log_a c$ albo wzoru na zamianę podstawy logarytmu

$$log_2 3 \cdot log_3 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100 =$$

$$= log_2 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100$$

2p – zapisanie lewej strony danej równości w postaci $\log_2 100$

$$log_2 4 \cdot log_4 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100 = \log_2 5 \cdot log_5 6 \cdot \ldots \cdot log_{98} 99 \cdot log_{99} 100 = \log_2 100$$

3p – uzasadnienie tezy

$$a = \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad a = \log_{2^{\frac{1}{3}}} 5^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad a = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 5 \quad \Rightarrow \quad \log_2 5 = \frac{2}{3}a$$

$$\log_2 100 = \log_2(4 \cdot 5^2) = \log_2 4 + 2\log_2 5 = 2 + 2 \cdot \frac{2}{3}a = \frac{4a+6}{3}$$

Zadanie 4. (0-3)

Rozwiąż nierówność

$$|x^2 - 4| < 5 - 8x$$

Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{x \in \left(-9, 4 - \sqrt{15}\right)}$

Rozwiązanie:

1p – wyróżnienie odpowiednich przedziałów i zapisanie nierówności w każdym z nich

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$x^2 - 4 < 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2,2)$$

1) W przedziale $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ nierówność ma postać

$$x^2 - 4 < 5 - 8x$$

2) W przedziale $x \in (-2,2)$ nierówność ma postać

$$-x^2 + 4 < 5 - 8x$$

2p – rozwiązanie obu otrzymanych nierówności

1) $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

$$x^2 - 4 < 5 - 8x$$

$$x \in (-9, -1)$$

Uwzględniając przedział $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, mamy:

$$x \in (-9, -2]$$

2) $x \in (-2,2)$

$$-x^2 + 4 < 5 - 8x$$

$$x \in \left(-\infty, 4 - \sqrt{15}\right) \cup \left(4 + \sqrt{15}, \infty\right)$$

Uwzględniając przedział $x \in (-2,2)$, mamy:

$$x \in \left[-2,4 - \sqrt{15}\right)$$

3p – podanie odpowiedzi

$$x \in \left(-9, ,4 - \sqrt{15}\right)$$

Zadanie 5. (0-3)

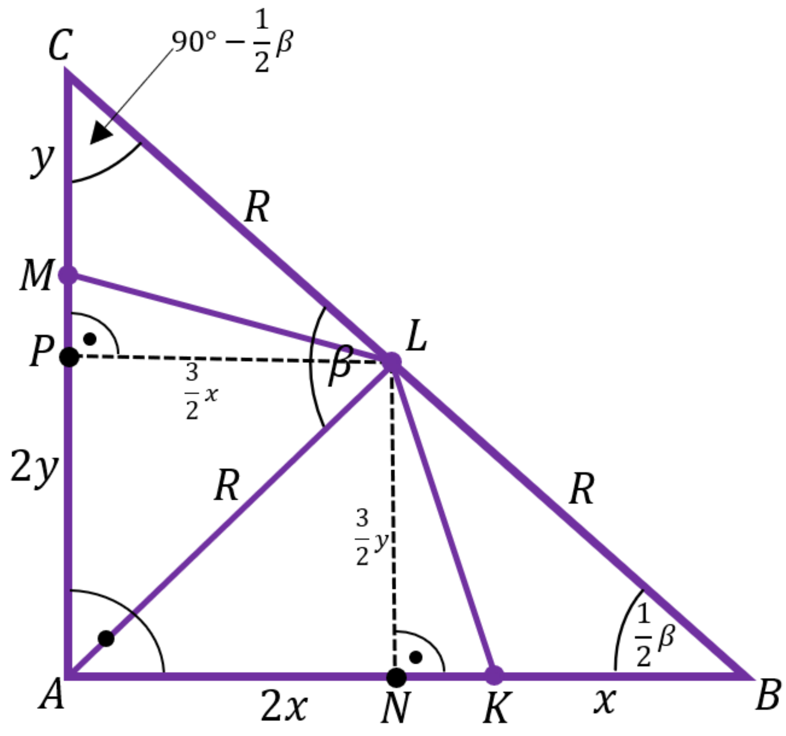
Dany jest trójkąt prostokątny o kącie prostym przy wierzchołku A. Ponadto, spełnione są warunki:

- na przyprostokątnej AB trójkąta leży punkt K w taki sposób, że $|AK| = 2 \cdot |KB|$
- na przyprostokątnej AC trójkąta leży punkt M w taki sposób, że $|AM| = 2 \cdot |MC|$
- na przeciwprostokątnej BC trójkąta leży punkt L w taki sposób, że $|BL| = |LC|$

Kąt ALC ma miarę równą β.

Wykaż, że stosunek pola koła opisanego na trójkącie ABC do pola czworokąta $AKLM$ jest równy $\frac{3\pi}{2\sin\beta}$.

Rozwiązanie:



Zauważmy, że punkt L jako środek przeciwprostokątnej trójkąta jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, stąd $|AL| = |BL| = |CL| = R$ (gdzie R jest długością promienia okręgu opisanego na trójkącie). Ponadto, zgodnie z treścią zadania oznaczamy: $|AK| = 2x$, $|KB| = x$ oraz $|AM| = 2y$, $|MC| = y$ (zobacz rysunek). Na trójkącie ABC jest opisany okrąg o środku w punkcie L, zatem kąt ALC o mierze β jest kątem środkowym opartym na łuku AC. Na tym samym łuku oparty jest kąt wpisany ABC, stąd $|\measuredangle ABC| = \frac{1}{2}\beta$. Z faktu, że suma wszystkich kątów wewnętrznych trójkąta wynosi $180°$ mamy ponadto $|\measuredangle ACB| = 90° - \frac{1}{2}\beta$.

1p – wyrażenie pola czworokąta $AKLM$ za pomocą x oraz y

$$P_{AKLM} = P_{AKL} + P_{ALM}$$

Trójkąty prostokątne LNB oraz ABC są podobne w skali $\frac{1}{2}$, zatem wysokość LN trójkąta AKL ma długość $|LN| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{3}{2}y$. Analogicznie – z podobieństwa trójkątów prostokątnych PLC oraz ABC (również w skali $\frac{1}{2}$) wnioskujemy, że wysokość PL trójkąta ALM ma długość $|PL| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{3}{2}x$.

$$P_{AKLM} = P_{AKL} + P_{ALM} = \frac{2x \cdot \frac{3}{2}y}{2} + \frac{2y \cdot \frac{3}{2}x}{2} = 3xy$$

2p – wyznaczenie pola czworokąta $KLMN$ za pomocą R oraz β

Pole trójkąta ABC jest równe $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3y = \frac{9}{2}xy$. Możemy również zapisać (korzystając ze wzoru $P = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\alpha$), że

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 2R \cdot \sin\frac{\beta}{2} = 3xR\sin\frac{\beta}{2}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 2R \cdot \sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = 3yRcos\frac{\beta}{2}$$

Możemy więc zapisać:

$$\frac{9}{2}xy = 3xR\sin\frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{3}R\sin\frac{\beta}{2}$$

oraz

$$\frac{9}{2}xy = 3yRcos\frac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}R\cos\frac{\beta}{2}$$

$$P_{AKLM} = 3xy = \frac{4}{3}R^2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} = \frac{2}{3}R^2\sin\beta$$

3p – wykazanie tezy

Pole koła opisanego na trójkącie wynosi: $P_K = \pi R^2$, stąd mamy:

$$\frac{P_K}{P_{AKLM}} = \frac{\pi R^2}{\frac{2}{3}R^2\sin\beta} = \frac{3\pi}{2\sin\beta}$$

Zadanie 6. (0-3)

Prawdopodobieństwo wygranej w pewnej grze losowej jest zawsze równe $\frac{1}{4}$. Michał postanowił, że przez cały tydzień (od poniedziałku do niedzieli) będzie grał w tą grę – każdego dnia dokładnie raz.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że Michał wygrał w tej grze dokładnie dwukrotnie w pierwszych czterech dniach tygodnia, jeśli wiadomo, że łącznie w ciągu tygodnia wygrał 4 razy. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\mathbf{\frac{18}{35}}$

Rozwiązanie:

A – zdarzenie polegające na tym, że Michał wygrał w tej grze 2 razy w pierwszych czterech dniach tygodnia

B – zdarzenie polegające na tym, że Michał wygrał w tej grze 4 razy w ciągu całego tygodnia

1p – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia B

$$P(B) = \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{945}{4^7}$$

2p – obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$

$$P(A \cap B) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{486}{4^7}$$

3p – obliczenie szukanego prawdopodobieństwa warunkowego $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{486}{4^7}}{\frac{945}{4^7}} = \frac{18}{35}$$

Zadanie 7. (0-4)

Liczby $2x - 18$, y oraz $x^2 - 6x + 3$ są odpowiednio – pierwszym, trzecim oraz piątym wyrazem nieskończonego, rosnącego ciągu geometrycznego (a_n). Liczby x oraz y są całkowite. Trzywyrazowy ciąg $(3x, y, 2 - 5x)$ jest arytmetyczny.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) o numerach parzystych. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\left(\mathbf{-8\sqrt{2}}\right)$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie układu równań, z którego można wyznaczyć wartości x oraz y

Zauważmy, że pierwszy, trzeci i piąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego (o ilorazie q) tworzą inny ciąg geometryczny o ilorazie q^2. Możemy więc dla tego ciągu skorzystać z własności ciągu geometrycznego, i zapisać:

$$y^2 = (2x - 18)(x^2 - 6x + 3)$$

Ponieważ ciąg $(3x, y, 2 - 5x)$ jest arytmetyczny, to mamy:

$$2y = 3x + 2 - 5x$$

Otrzymujemy zatem:

$$\begin{cases} y^2 = (2x - 18)(x^2 - 6x + 3) \\ 2y = -2x + 2 \end{cases}$$

2p – wyznaczenie wszystkich <u>całkowitych</u> rozwiązań otrzymanego układu równań

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$$

3p – obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego (a_n) <u>oraz</u> drugiego wyrazu tego ciągu

$$a_1 = 2x - 18 = -8$$

$$a_3 = y = -4$$

$$a_5 = x^2 - 6x + 3 = -2$$

$$a_2^2 = a_1 a_3 \quad \Rightarrow \quad a_2^2 = 32 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -4\sqrt{2}$$

(bo ciąg (a_n) jest rosnący, dla $a_2 = 4\sqrt{2}$ byłby niemonotoniczny).

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-4}{-4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4p – obliczenie sumy wszystkich wyrazów ciągu o numerach parzystych

$$S = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{a_2}{1 - q^2} = \frac{-4\sqrt{2}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -8\sqrt{2}$$

Zadanie 8. (0-4)

Rozwiąż równanie

$$sin^3 x + sin^3(2x) = 2cos\,(3x) + 6cos\,x + 1$$

w przedziale $[0,2\pi]$. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie liczby $\cos(3x)$ w postaci $4\cos^3 x - 3\cos x$

$$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos x(2\cos^2 x - 1) - \sin x \cdot 2\sin x \cos x =$$

$$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

2p – zapisanie równania w postaci iloczynowej

Wstawiając $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, otrzymamy:

$$sin^3 x + sin^3(2x) = 2(4\cos^3 x - 3\cos x) + 6cos\,x + 1$$

$$\sin^3 x + 8\sin^3 x cos^3 x = = 8\cos^3 x + 1$$

$$\sin^3 x(8\cos^3 x + 1) - (8\cos^3 x + 1) = 0$$

$$(8\cos^3 x + 1)\,(\sin^3 x - 1) = 0$$

3p – wyznaczenie wszystkich rozwiązań równania (bez uwzględniania przedziału $[0,2\pi]$)

$$8\cos^3 x + 1 = 0 \quad \vee \quad \sin^3 x - 1 = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin x = 1$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

4p – podanie wszystkich rozwiązań równania w przedziale $[0,2\pi]$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

Zadanie 9. (0-4)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD takich, że $|AB| > |CD|$. Koło o polu 12π i środku w punkcie S jest wpisane w ten trapez. Kąt ASB ma miarę $120°$.

Oblicz pole trapezu $ABCD$. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $P = 72$

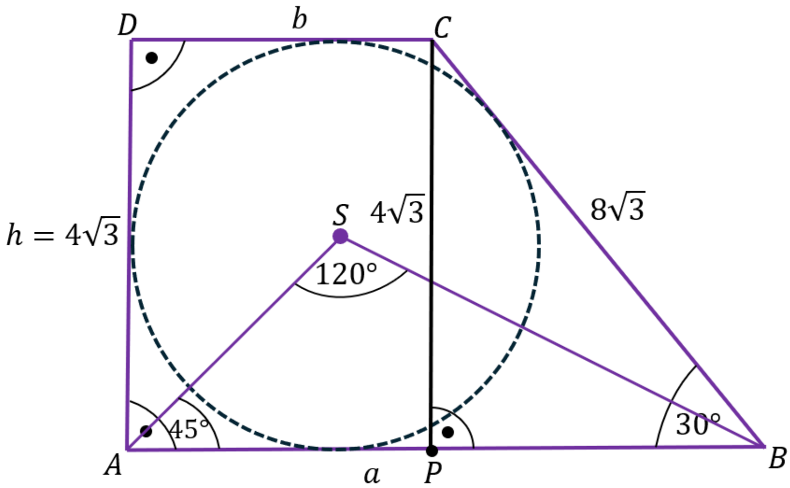
Rozwiązanie:

1p – obliczenie długości wysokości trapezu

r – długość promienia koła wpisanego w trapez

$$P_K = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 = 12\pi \quad \Rightarrow \quad r = 2\sqrt{3}$$

$$h = 2r = 4\sqrt{3}$$



2p – uzasadnienie, że kąt ABC ma miarę $30°$

Punkt S (środek koła wpisanego w trapez) jest punktem przecięcia dwusiecznych wszystkich kątów wewnętrznych tego trapezu. To oznacza, że odcinek AS jest zawarty w dwusiecznej kąta prostego DAB, skąd mamy: $|\measuredangle SAB| = 45°$, zatem $|\measuredangle ABS| = 180° - 120° - 45° = 15°$. Analogicznie – odcinek BS jest zwarty w dwusiecznej kąta ABC, stąd $|\measuredangle ABC| = 2 \cdot 15° = 30°$.

3p – obliczenie długości boku BC trapezu oraz zapisanie równości wynikającej z faktu, że w trapez można wpisać koło

Korzystając z własności trójkąta prostokątnego charakterystycznego PBC o kątach ostrych $30°$ i $60°$ mamy: $|BC| = 2 \cdot |PC| = 8\sqrt{3}$. W trapez $ABCD$ można wpisać koło, stąd:

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$$

4p – obliczenie pola trapezu

$$a + b = 4\sqrt{3} + 8\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a + b = 12\sqrt{3}$$

$$P = \frac{(a+b)h}{2} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 72$$

Zadanie 10. (0-5)

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ oraz $EFGH$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych podstawy $ABCD$ graniastosłupa. Punkt K leży na krawędzi CG graniastosłupa w taki sposób, że stosunek tangensa kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy do tangensa kąta nachylenia odcinka SK do płaszczyzny podstawy jest równy $\frac{2}{3}$. Krawędź podstawy graniastosłupa ma długość równą a, a wysokość graniastosłupa – ma długość równą H. Płaszczyzna π przechodzi przez punkty B , D oraz K.

Oblicz odległość wierzchołka C graniastosłupa od płaszczyzny π. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\frac{3aH}{\sqrt{18H^2+16a^2}}$

Rozwiązanie:

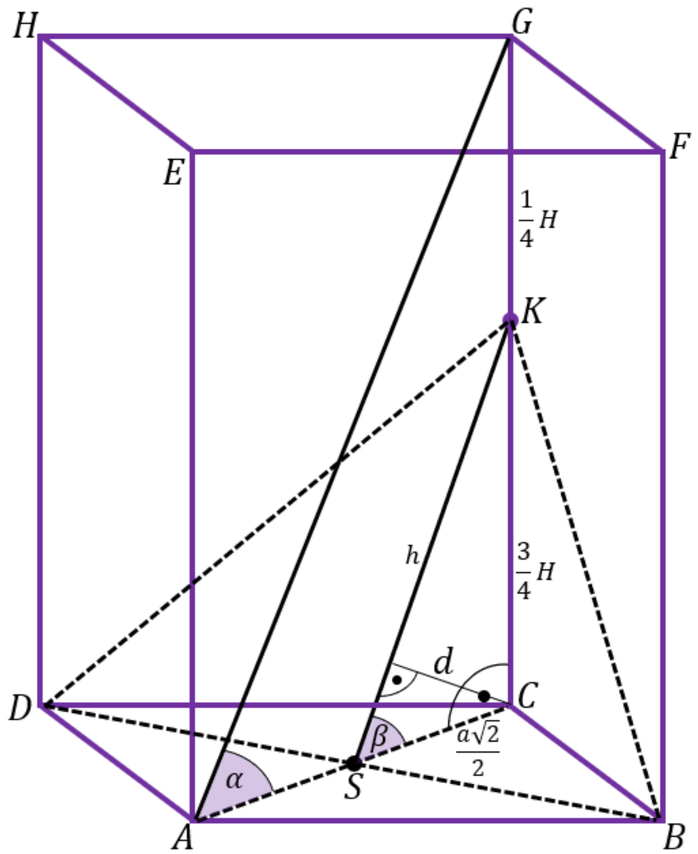
Oznaczenia tak jak na rysunku:

d – odległość wierzchołka C od płaszczyzny π

a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa

H – długość wysokości graniastosłupa

α, β – kąty odpowiednio nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy oraz nachylenia odcinka SK do płaszczyzny podstawy



1p – uzasadnienie, że $|KC| = \frac{3}{4}H$

$$\frac{tg\ \alpha}{tg\ \beta} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{H}{a\sqrt{2}}}{\frac{|KC|}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}} = \frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad |KC| = \frac{3}{4}H$$

2p – wyrażenie długości wysokości h trójkąta DBK za pomocą a oraz H

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta SCK, mamy:

$$\left(\frac{3}{4}H\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = h^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{9}{16}H^2 + \frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{4}\sqrt{9H^2 + 8a^2}$$

3p – zapisanie objętości ostrosłupa $DBCK$ za pomocą a oraz H

$$V_{DBCK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{3}{4}H = \frac{1}{8}a^2H$$

4p – zapisanie objętości ostrosłupa $DBCK$ przyjmując, że jego podstawą jest trójkąt DBK, a wysokość jest szukaną odległością d wierzchołka C od płaszczyzny π oraz zapisanie równości, z której można wyznaczyć d

$$V_{DBCK} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot h \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{6}ad \cdot \frac{1}{4}\sqrt{9H^2 + 8a^2} = \frac{1}{24}a\sqrt{18H^2 + 16a^2} \cdot d$$

Przyrównując otrzymane wyrażenia, otrzymujemy:

$$\frac{1}{24}a\sqrt{18H^2 + 16a^2} \cdot d = \frac{1}{8}a^2H$$

5p – wyznaczenie d z otrzymanej równości

$$d = \frac{3aH}{\sqrt{18H^2 + 16a^2}}$$

Zadanie 11. (0-6)

Funkcje kwadratowe f oraz g zmiennej rzeczywistej x określone są wzorami

$$f(x) = x^2 - (3m - 5)x + 4 - 3m$$

oraz

$$g(x) = x^2 + (m - 1)x + 14 - 2m$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których obie funkcje: f oraz g mają po dwa różne miejsca zerowe, a suma kwadratów miejsc zerowych funkcji f nie jest większa niż liczba o 24 mniejsza od sumy sześcianów miejsc zerowych funkcji g. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{m \in \left(-\infty, -7 - 3\sqrt{10}\right]}$

Rozwiązanie:

Δ_1, Δ_2 – wyróżniki („delty”) odpowiednio dla funkcji f oraz g

x_1, x_2 – miejsca zerowe funkcji f

x_3, x_4 – miejsca zerowe funkcji g

1p – rozwiązanie nierówności $\Delta_1 > 0$

$$\Delta_1 = 9m^2 - 18m + 9$$

$$9m^2 - 18m + 9 > 0 \quad \Rightarrow \quad m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

2p – rozwiązanie nierówności $\Delta_2 > 0$ oraz poprawne zapisanie warunku „suma kwadratów miejsc zerowych funkcji f nie jest większa niż liczba o 24 mniejsza od sumy sześcianów miejsc zerowych funkcji g" za pomocą x_1, x_2, x_3, x_4

$$\Delta_2 = m^2 + 6m - 55$$

$$m^2 + 6m - 55 > 0 \quad \Rightarrow \quad m \in (-\infty, -11) \cup (5, \infty)$$

Ponadto zgodnie z treścią zadania, mamy:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^3 + x_4^3 - 24$$

3p – zapisanie otrzymanej nierówności w postaci, którą można przekształcić używając wzory Viete'a

$$x_1^2 + x_2^2 \leq x_3^3 + x_4^3 - 24$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \leq (x_3 + x_4)(x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2) - 24$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \leq (x_3 + x_4)((x_3 + x_4)^2 - 3x_3x_4) - 24$$

4p – zastosowanie wzorów Viete'a dla obu funkcji: f i g oraz zapisanie otrzymanej nierówności w postaci $am^3 + bm^2 + cm + d \leq 0$ (lub równoważnej)

$$x_1 + x_2 = 3m - 5 \qquad x_1x_2 = 4 - 3m \qquad x_3 + x_4 = 1 - m \qquad x_3x_4 = 14 - 2m$$

Nierówność ma więc postać:

$$(3m - 5)^2 - 2(4 - 3m) \leq (1 - m)\big((1 - m)^2 - 3(14 - 2m)\big) - 24$$

$$m^3 + 12m^2 - 69m + 82 \leq 0$$

5p – rozwiązanie otrzymanej nierówności wielomianowej

Niech $W(m) = m^3 + 12m^2 - 69m + 82$. Ponieważ $W(2) = 0$, to wielomian W jest podzielny przez dwumian $(m - 2)$: $\quad (m^3 + 12m^2 - 69m + 82) : (m - 2) = m^2 + 14m - 41$

$$(m - 2)(m^2 + 14m - 41) \leq 0$$

$$m \in \left(-\infty, -7 - 3\sqrt{10}\right] \cup \left[2, -7 + 3\sqrt{10}\right]$$

6p – wyznaczenie części wspólnej otrzymanych przedziałów i podanie odpowiedzi

Wyznaczamy część wspólną przedziałów: $m \in (-\infty, -11) \cup (5, \infty)$, $m \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ oraz $m \in \left(-\infty, -7 - 3\sqrt{10}\right] \cup \left[2, -7 + 3\sqrt{10}\right]$:

$$m \in \left(-\infty, -7 - 3\sqrt{10}\right]$$

Zadanie 12. (0-6)

Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, na którym można opisać okrąg. Wiadomo, że $A = (-3,2)$, $B = (1,-2)$ oraz $C = (-2,7)$. Punkt D leży na okręgu o równaniu $x^2 + (y-1)^2 = 85$, a jego współrzędne są różnymi, dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Prosta l przechodzi przez punkty A oraz D.

Oblicz cosinus kąta nachylenia prostej l do osi Ox kartezjańskiego układu współrzędnych (x, y). Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}}$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie odpowiedniego układu równań, z którego będzie można wyznaczyć współrzędne środka oraz długość promienia okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$

$$O: \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Wiemy, że okrąg opisany na czworokącie $ABCD$ przechodzi przez punkty A , B , C, możemy więc zapisać (podstawiamy współrzędne tych punktów do równania okręgu):

$$\begin{cases} (-3-a)^2 + (2-b)^2 = r^2 \\ (1-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2 \\ (-2-a)^2 + (7-b)^2 = r^2 \end{cases}$$

2p – obliczenie a , b lub r

Odejmując stronami pierwsze dwa równania, otrzymamy:

$$(-3-a)^2 + (2-b)^2 - (1-a)^2 - (-2-b)^2 = 0$$

$$a = b - 1$$

Odejmując stronami równanie 2 i 3 i podstawiając $a = b - 1$, otrzymamy:

$$(1-a)^2 + (-2-b)^2 - (-2-a)^2 - (7-b)^2 = 0$$

$$18b - 6a - 48 = 0$$

$$18b - 6(b-1) - 48 = 0$$

$$b = \frac{7}{2}$$

3p – wyznaczenie równania okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ oraz zapisanie układu równań, z którego można wyznaczyć współrzędne punktu D

$$a = b - 1 = \frac{5}{2}$$

$$(-3-a)^2 + (2-b)^2 = r^2$$

$$r^2 = \left(-3 - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{65}{2}$$

Zatem O: $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$. Punkt D leży na okręgu O oraz (zgodnie z treścią zadania), na okręgu $x^2+(y-1)^2=85$. Jego współrzędne wyznaczymy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{65}{2}\\ x^2+(y-1)^2=85\end{cases}$$

4p – zapisanie równania kwadratowego, z którego możliwe jest wyznaczenie x lub y

Odejmując równania z powyższego układu równań obustronnie, otrzymamy:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2-x^2-(y-1)^2=\frac{65}{2}-85$$

$$y=14-x$$

Podstawiając $y=14-x$ do równości $x^2+(y-1)^2=85$, otrzymamy:

$$x^2+(13-x)^2=85$$

5p – wyznaczenie współrzędnych punktu D <u>oraz</u> równania prostej l

$$x_1=6 \qquad x_2=7$$

i odpowiednio, ponieważ $y=14-x$, mamy:

$$y_1=8 \qquad y_2=7$$

Ponieważ współrzędne punktu D są różne, to $D=(6,8)$.

Równanie prostej przechodzącej przez punkty $A=(-3,2)$ i $D=(6,8)$ ma postać:

$$l: \quad y=\frac{2}{3}x+4$$

6p – obliczenie cosinusa kąta nachylenia prostej l do osi Ox układu współrzędnych

α – kąt <u>ostry</u> nachylenia prostej l do osi Ox układu współrzędnych

Współczynnik kierunkowy w równaniu prostej l jest równy $a=\frac{2}{3}$, stąd

$$tg\,\alpha=\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\alpha=\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Zadanie 13.

Rozważamy wszystkie trójkąty prostokątne, dla których promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość równą R.

Zadanie 13.1. (0-2)

Wykaż, że objętość V bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną tego trójkąta w zależności od długości a tej przyprostokątnej jest określona wzorem

$$V(a)=\frac{\pi}{3}a(4R^2-a^2)$$

Rozwiązanie:

1p – zapisanie, że otrzymaną bryłą obrotową jest stożek i zapisanie równości, z której można wyrazić długość promienia podstawy tego stożka za pomocą a oraz R

Otrzymana bryła obrotowa jest stożkiem o tworzącej długości $l = 2R$ i wysokości $h = a$.

$$r^2 + h^2 = l^2$$

$$r^2 + a^2 = 4R^2$$

2p – uzasadnienie tezy

$$r^2 = 4R^2 - a^2$$

$$V(a) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(4R^2 - a^2) \cdot a = \frac{\pi}{3}a(4R^2 - a^2)$$

Zadanie 13.2. (0-3)

Objętość V bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej krótszą przyprostokątną tego trójkąta w zależności od długości a tej przyprostokątnej jest określona wzorem

$$V(a) = \frac{\pi}{3}a(4R^2 - a^2)$$

dla $a \in \left(0, \sqrt{2}R\right)$.

Wyznacz długości boków tego z rozważanych trójkątów prostokątnych, dla którego objętość powstałej bryły obrotowej jest możliwie największa. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź: $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}R}$, $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}}{3}R}$, $\boldsymbol{2R}$

Rozwiązanie:

1p – obliczenie pochodnej funkcji V

$$V(a) = \frac{\pi}{3}(-a^3 + 4R^2 a)$$

$$V'(a) = \frac{\pi}{3}(-3a^2 + 4R^2)$$

2p – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V

$$V'(a) = 0$$

$$\frac{\pi}{3}(-3a^2 + 4R^2) = 0$$

$$-3a^2 + 4R^2 = 0$$

$$a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}R \qquad a_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

3p – uzasadnienie, że funkcja V osiąga wartość największą dla $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ i podanie długości boków trójkąta prostokątnego

Dziedziną funkcji jest przedział $a \in \left(0, \sqrt{2}R\right)$.

Ponieważ $V'(a) > 0$ dla $a \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)$ to funkcja V jest rosnąca dla $a \in \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}R\right)$.

Ponieważ $V'(a) < 0$ dla $a \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R, \sqrt{2}R\right)$, to funkcja V jest malejąca dla $a \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}R, \sqrt{2}R\right)$.

To oznacza, że dla $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ funkcja V przyjmuje wartość największą. Wówczas boki trójkąta prostokątnego mają długości: $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$, $2R$ oraz $r = \sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.