CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	EMAP-R0-100, EMAP-R0-200, EMAP-R0-300, EMAP-R0-400, EMAP-R0-600, EMAP-R0-700, EMAP-R0-K00, EMAP-R0-Q00, EMAU-R0-100
Termin egzaminu:	15 maja 2024 r.
Data publikacji dokumentu:	28 czerwca 2024 r.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 8.1R) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
A

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 3.8R) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

[1] Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1698).

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: 4.2R) szkicuje wykres funkcji określonej w różnych przedziałach różnymi wzorami; odczytuje własności takiej funkcji z wykresu.

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.1R) oblicza granice funkcji […].

Zasady oceniania
1 pkt – odpowiedź poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie
C

ZADANIE OTWARTE (KODOWANE)

Zadanie 5. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 2.2R) dzieli wielomiany przez dwumian $ax + b$.

Zasady oceniania
2 pkt – odpowiedź całkowicie poprawna.
0 pkt – odpowiedź niepełna lub niepoprawna albo brak odpowiedzi.

Rozwiązanie

4	1	1

ZADANIA OTWARTE (NIEKODOWANE)

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 1.2R) stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu.

Zasady oceniania
3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.
2 pkt – przekształcenie wyrażenia $\frac{2\log_5 4 + \log_4 3}{\log_5 4 \cdot (1 + \log_4 3)}$ lub $\log_{12} 80$, lub obydwu tych wyrażeń do takiej postaci, z której poprzez jednokrotne zastosowanie wzoru na

logarytm iloczynu lub wzoru na zamianę podstawy logarytmu, lub logarytmu potęgi oraz ewentualne kilkukrotne przekształcenie wyrażenia wymiernego można otrzymać tezę

ALBO

– zapisanie jednego równania wymiernego z a, b oraz niewiadomą x, np. $bx + x = \frac{1}{a} + 2$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 5 w postaci $4^{\frac{1}{a}}$ oraz liczby 4 w postaci $12^{\frac{1}{1+b}}$ (dla sposobu IV).

1 pkt – zastosowanie wzoru na zamianę podstawy logarytmu lub na logarytm iloczynu, np. $\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12}$, $\log_{12} 80 = \frac{\log_5 80}{\log_5 12}$, $2 \cdot \log_5 4 + 1 = \log_5(4 \cdot 4 \cdot 5)$, $1 + \log_4 3 = \log_4(4 \cdot 3)$

ALBO

– zapisanie dwóch spośród liczb $3, 4, 5$ jako potęgi, której podstawą jest trzecia z nich, a wykładnik jest zależny od a lub b, np.: $5 = 4^{\frac{1}{a}}$ i $3 = 4^b$ **oraz** zapisanie równania $12^x = 80$ (dla sposobu III),

ALBO

– zapisanie liczby 4 w postaci $12^{\frac{1}{1+b}}$ (dla sposobu IV).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\log_{12} 80$, stosując wzór na zamianę podstawy logarytmu, a następnie wzór na logarytm iloczynu:

$$\log_{12} 80 = \frac{\log_4(16 \cdot 5)}{\log_4(4 \cdot 3)} = \frac{\log_4 16 + \log_4 5}{\log_4 4 + \log_4 3} = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3}$$

Korzystamy ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy

$$\log_4 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 4} = \frac{1}{\log_5 4} = \frac{1}{a}$$

Zatem

$$\log_{12} 80 = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3} = \frac{2 + \frac{1}{a}}{1 + b} = \frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}$$

To należało wykazać.

Sposób II

Przekształcamy wyrażenie $\frac{2a + 1}{a \cdot (1 + b)}$, korzystając z założenia oraz ze wzoru na logarytm sumy:

$$\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}=\frac{2\cdot\log_5 4+1}{\log_5 4\cdot(1+\log_4 3)}=\frac{\log_5(4\cdot 4\cdot 5)}{\log_5 4\cdot\log_4(4\cdot 3)}=\frac{\log_5 80}{\log_5 4\cdot\log_4 12}$$

Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na zamianę podstawy logarytmu i otrzymujemy dalej

$$\frac{\log_5 80}{\log_5 4\cdot\log_4 12}=\frac{\log_4 80}{\log_4 12}=\log_{12} 80$$

Zatem $\log_{12} 80=\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

To należało wykazać.

Sposób III

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $5=4^{\frac{1}{a}}$ oraz $3=4^b$.

Oznaczmy przez x liczbę rzeczywistą taką, że $12^x=80$. Wtedy

$$3^x\cdot 4^x=80$$

$$(4^b)^x\cdot 4^x=4^{\frac{1}{a}}\cdot 4^2$$

$$4^{bx+x}=4^{\frac{1}{a}+2}$$

Stąd

$$bx+x=\frac{1}{a}+2$$

$$x(1+b)=\frac{2a+1}{a}$$

$$x=\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$$

Zatem $\log_{12} 80=x=\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

To należało wykazać.

Sposób IV

Korzystamy z definicji logarytmu oraz z założenia i otrzymujemy $5=4^{\frac{1}{a}}$ oraz $3=4^b$. Stąd

$12=4^{b+1}$, czyli $4=12^{\frac{1}{1+b}}$ .Zatem

$$80=5\cdot 4^2=4^{\frac{1}{a}}\cdot 4^2=4^{\frac{1}{a}+2}=\left(12^{\frac{1}{1+b}}\right)^{\frac{1}{a}+2}=12^{\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}}$$

czyli $\log_{12} 80=\frac{2a+1}{a\cdot(1+b)}$.

To należało wykazać.

Zadanie 7. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
V. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: 7.1R) stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tj. zapisanie, że trójkąty ASD i BSC są podobne, zapisanie, że trójkąty ASB i DSC są podobne, zapisanie równości miar odpowiednich kątów tych trójkątów, zapisanie równości $|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|$ i sformułowanie wniosku, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

2 pkt – zapisanie, że trójkąty ASD i BSC są podobne oraz $|\sphericalangle SAD| = |\sphericalangle SBC|$ i $|\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle SCB|$

ALBO

– zapisanie, że trójkąty ASB i DSC są podobne oraz $|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SDC|$ i $|\sphericalangle SBA| = |\sphericalangle SCD|$.

1 pkt – zapisanie, że trójkąty ASD i BSC są podobne na mocy cechy bkb

ALBO

– zapisanie, że trójkąty ASB i DSC są podobne na mocy cechy bkb.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

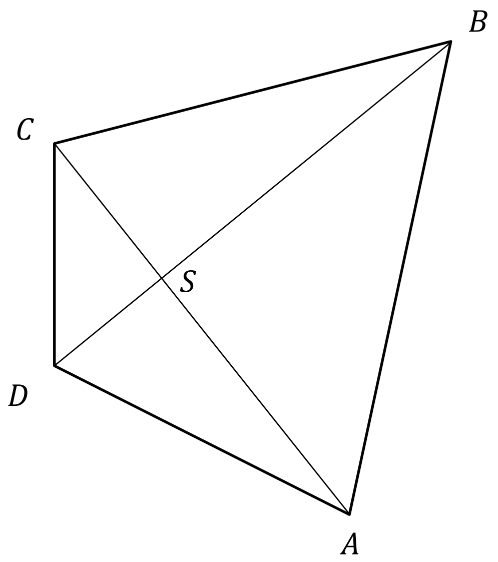
Uwagi:

1. Zdający, przeprowadzając pełne rozumowanie, może także zapisać, że dowolne dwa kolejne wierzchołki czworokąta leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez dwa pozostałe wierzchołki, np. C i D leżą po tej samej stronie prostej AB, gdyż czworokąt $ABCD$ jest wypukły. Stąd i z równości kątów ACB i ADB (wynikającej z podobieństwa trójkątów ASD i BSC) zapisze wniosek, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

2. Nie akceptujemy rozumowania, w którym zdający powołuje się na twierdzenie odwrotne do twierdzenia o siecznych, gdyż zadanie to w istocie wymaga przeprowadzenia dowodu tego twierdzenia w przypadku, gdy punkt przecięcia siecznych leży wewnątrz okręgu.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Kąty ASD oraz BSC są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle ASD| = |\sphericalangle BSC|$. Stąd i z założenia $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$ wnioskujemy, że trójkąty ASD i BSC są podobne na mocy cechy bkb.



Zatem

(1) $$|\sphericalangle DAS| = |\sphericalangle CBS| \text{ oraz } |\sphericalangle ADS| = |\sphericalangle BCS|.$$

Kąty ASB oraz DSC są wierzchołkowe, więc $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle DSC|$. Stąd i z założenia $\frac{|AS|}{|DS|} = \frac{|BS|}{|CS|}$ wnioskujemy, że trójkąty ASB i DSC są podobne na mocy cechy bkb. Zatem

(2) $$|\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SDC| \text{ oraz } |\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle DCS|.$$

Ze związków (1) oraz (2) otrzymujemy

$$\begin{aligned}|\sphericalangle DAB| + |\sphericalangle BCD| &= |\sphericalangle DAS| + |\sphericalangle SAB| + |\sphericalangle BCS| + |\sphericalangle DCS| = \\ &= |\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle ADS| + |\sphericalangle ABS| = \\ &= |\sphericalangle ABS| + |\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle SDC| + |\sphericalangle ADS| = \\ &= |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDA|\end{aligned}$$

Stąd i z twierdzenia o okręgu opisanym na czworokącie wnioskujemy, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

To należało wykazać.

Zadanie 8. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 10.1R) wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $11\,040$.

2 pkt – zapisanie L_1 : $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów czteroelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i jednej cyfry parzystej różnej od zera: $\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}$

ALBO

– zapisanie L_2 : $\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów pięcioelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i dwóch cyfr parzystych: $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}$,

ALBO

– zapisanie P : $4\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą, np. liczba ciągów postaci (n,p,n,p,n) jest równa $5\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3$,

ALBO

– zapisanie N: $5\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4!$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera, np. liczba ciągów postaci (p,n,n,p,n) jest równa $4\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3$,

ALBO

– zapisanie Z^+: $4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których żaden wyraz nie jest równy zero, np. liczba ciągów postaci (n,n,n,p,p), gdzie $p\in\{2,4,6,8\}$, jest równa $5\cdot 4\cdot 3\cdot 4\cdot 3$,

ALBO

– zapisanie Z^-: $10\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 3$ **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których jeden z wyrazów jest równy zero, np. liczba ciągów postaci $(p,n,n,n,0)$, gdzie $p\in\{2,4,6,8\}$, jest równa $4\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 1$.

1 pkt – zapisanie L_1 (lub L_2), np. $L_1=\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}\cdot 5!$, $L_2=\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}\cdot 4!$

ALBO

– zapisanie P (lub N), np. $P=4\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot 4!$, $N=5\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 4!$,

ALBO

– zapisanie Z^+ (lub Z^-), np. $Z^+=4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 4\cdot 3=3\,840$, $Z^-=10\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 4\cdot 3=7\,200$,

ALBO

– zapisanie liczby zbiorów pięcioelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i dwóch cyfr parzystych: $\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}$ **oraz** zapisanie liczby zbiorów czteroelementowych złożonych z trzech cyfr nieparzystych i jednej cyfry parzystej różnej od zera: $\binom{5}{3}\cdot\binom{4}{1}$,

ALBO
– zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą (np. liczba ciągów postaci (n, p, n, p, n) jest równa $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$) **oraz** zapisanie liczby ciągów pięciowyrazowych w jednym z przypadków, w których pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera (np. liczba ciągów postaci (p, n, n, p, n) jest równa $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3$).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozpatruje liczby inne niż pięciocyfrowe, to otrzymuje **0 punktów**.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech L_1 będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:
- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- trzy wyrazy są liczbami nieparzystymi, a dwa są liczbami parzystymi.

Aby wygenerować taki ciąg należy wybrać trzy cyfry spośród pięciu nieparzystych, dwie cyfry spośród dwóch parzystych i wybrane pięć cyfr ustawić w ciąg. Zatem

$$L_1 = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5!$$

Niech L_2 będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:
- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- pierwszy wyraz jest zerem, a wśród pozostałych wyrazów są trzy cyfry nieparzyste i jedna cyfra parzysta.

Aby wygenerować taki ciąg należy wybrać trzy cyfry spośród pięciu nieparzystych oraz jedną cyfrę spośród cyfr: $2, 4, 6, 8$, i wybrane cztery cyfry ustawić w ciąg. Następnie na początku ciągu ustawić cyfrę 0. Zatem

$$L_2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4!$$

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, o różnych cyfrach, w których dokładnie trzy cyfry są nieparzyste, a pozostałe są parzyste, jest

$$L_1 - L_2 = \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2} \cdot 5! - \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{1} \cdot 4! = 10 \cdot 10 \cdot 120 - 10 \cdot 4 \cdot 24 = 11\,040$$

Sposób II

Niech P będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:
- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- pierwszy wyraz jest cyfrą parzystą różną od zera, a wśród pozostałych wyrazów są trzy cyfry nieparzyste i jedna cyfra parzysta.

Pierwszy wyraz takiego ciągu można ustalić na cztery sposoby (wybieramy jedną cyfrę parzystą spośród $2, 4, 6, 8$). Pozostałe wyrazy można ustalić poprzez wybór jednej cyfry parzystej spośród czterech, trzech cyfr nieparzystych spośród pięciu, a następnie ustawienie wybranych czterech cyfr na ostatnich czterech pozycjach w ciągu. Zatem

$$P = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4!$$

Niech N będzie liczbą wszystkich ciągów pięcioelementowych, których:

- wyrazy są cyframi, parami różnymi
- pierwszy wyraz jest cyfrą nieparzystą, a wśród pozostałych wyrazów są dwie cyfry nieparzyste i dwie cyfry parzyste.

Pierwszy wyraz takiego ciągu można ustalić na pięć sposobów (wybieramy jedną cyfrę nieparzystą spośród pięciu). Pozostałe wyrazy można ustalić poprzez wybór dwóch cyfr parzystych spośród pięciu, dwóch cyfr nieparzystych spośród czterech, a następnie ustawienie wybranych czterech cyfr na ostatnich czterech pozycjach w ciągu. Zatem

$$N = 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4!$$

Wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, o różnych cyfrach, w których dokładnie trzy cyfry są nieparzyste, a pozostałe są parzyste, jest

$$P + N = 4 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{3} \cdot 4! + 5 \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 24 + 5 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 24 = 11\,040$$

Sposób III

Rozważmy dwa przypadki:

1. Gdy w zapisie liczby występuje cyfra zero. Cyfrę tę możemy wstawić na jedno z 4 miejsc. Miejsce dla drugiej, różnej od zera cyfry parzystej możemy wybrać na 4 sposoby, a na wybranym miejscu możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr parzystych. Na pierwsze z pozostałych trzech wolnych miejsc możemy wstawić jedną z 5 cyfr nieparzystych, na drugie z pozostałych dwóch wolnych miejsc możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr nieparzystych, a na ostatnim wolnym miejscu – jedną z pozostałych 3 cyfr nieparzystych. Zatem liczba Z^+ wszystkich rozpatrywanych liczb w tym przypadku jest równa
$$Z^+ = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 3\,840$$
2. Gdy w zapisie liczby nie występuje cyfra zero. Dwa miejsca dla cyfr parzystych możemy wybrać na $\binom{5}{2} = 10$ sposobów. Na pierwsze z wybranych dwóch miejsc możemy wstawić jedną z 4 cyfr parzystych, a na drugie – jedną z 3. Na pierwsze z pozostałych trzech wolnych miejsc możemy wstawić jedną z 5 cyfr nieparzystych, na drugie z pozostałych dwóch wolnych miejsc możemy wstawić jedną z pozostałych 4 cyfr nieparzystych, a na ostatnim wolnym miejscu – jedną z pozostałych 3 cyfr nieparzystych. Zatem liczba Z^- wszystkich rozpatrywanych liczb w tym przypadku jest równa
$$Z^- = 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 7\,200$$

Stąd wszystkich rozważanych liczb jest $Z^+ + Z^- = 3\,840 + 7\,200 = 11\,040$.

Zadanie 9. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: 11.2R) oblicza pochodne funkcji wymiernych; 11.3R) korzysta z geometrycznej interpretacji pochodnej.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a = \frac{7}{2}$ oraz $b = -5$.

2 pkt – obliczenie współczynnika kierunkowego stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P:

$a = f'(2) = \frac{7}{2}$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f, np. $f'(x) = \frac{(3x^2-3)\cdot x - (x^3-3x+2)\cdot 1}{x^2}$,

$f'(x) = 2x + 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający błędnie zastosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji lub błędnie obliczy pochodną funkcji $y = x^3 - 3x + 2$, lub $y = x$, to może otrzymać **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni błędu w obliczaniu współczynnika a oraz b.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 3) \cdot x - (x^3 - 3x + 2) \cdot 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$$

Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(2) = \frac{7}{2}$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$f(2) = \frac{7}{2} \cdot 2 + b$$

$$2 = 7 + b$$

$$b = -5$$

Współczynniki w równaniu stycznej są równe: $a = \frac{7}{2}$ oraz $b = -5$.

Zadanie 10. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 10.1R) wykorzystuje wzory na liczbę […] kombinacji […]. 10.2) oblicza prawdopodobieństwa […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $P(A)=\frac{28}{8^6}=\frac{7}{65536}$.

2 pkt – zapisanie liczby $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** zapisanie liczby $|A|$ wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, np. $|\Omega|=8^6$ oraz $|A|=\binom{8}{6}$

ALBO

– zapisanie liczby $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych **oraz** wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego zdarzenia niewłaściwego, np. $|\Omega|=8^6$ oraz

$$A=\{876543, 876542, 876541, 876532, 876531, 876521, 876432, 876431, 876421, 876321, 875432, 875431, 875421, 875321, 874321, 865432, 865431, 865421, 865321, 864321, 854321, 765432, 765431, 765421, 765321, 764321, 754321, 654321\}.$$

1 pkt – zapisanie liczby $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych: np. $|\Omega|=8^6$

ALBO

– zapisanie liczby $|A|$ wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: np. $|A|=\binom{8}{6}$,

ALBO

– wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A i niewypisanie żadnego zdarzenia niewłaściwego:

654321, 765432, 765321, 876543, 875432, 865432, 864321, 854321,
765431, 764321, 876542, 875431, 865431,
765421, 754321, 876541, 875421, 865421,
876532, 875321, 865321,
876531, 874321,
876521,
876432,
876431,
876421,
876321.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Zdarzeniem elementarnym jest sześciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, więc liczba $|\Omega|$ wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 8^6$.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosowano liczbę, której druga cyfra (licząc od lewej strony) jest mniejsza od pierwszej, a każda następna cyfra tej liczby jest mniejsza od poprzedniej. Wtedy zdarzeniem elementarnym sprzyjającym zdarzeniu A jest sześciowyrazowy ciąg malejący. Liczba wszystkich takich ciągów jest równa $\binom{8}{6}$, więc $|A| = \binom{8}{6}$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{8}{6}}{8^6} = \frac{28}{262\,144} = \frac{7}{65536}$$

Zadanie 11. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 5.3) stosuje wzór na n–ty wyraz […] ciągu arytmetycznego; 5.4) stosuje wzór na n–ty wyraz […] ciągu geometrycznego.

Zasady oceniania (dla sposobu I i II)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5, y = 20, z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą r, np. $(35 - r)^2 = (35 - 2r) \cdot (35 + 3r)$

ALBO

– poprawne wyznaczenie r w zależności od x z równania $(x + r)^2 = x(x + 5r)$: $r = 3x$.

2 pkt – zapisanie x, y oraz z w zależności od r: $x = 35 - 2r$, $y = 35 - r$, $z = 35 + 3r$

ALBO

– zapisanie układu równań

$x + x + r + x + 5r = 105$ i $(x + r)^2 = x(x + 5r)$ lub

$x + x + r + x + 5r = 105$ i $x + x \cdot \dfrac{x + 5r}{x + r} + x \cdot \left(\dfrac{x + 5r}{x + r}\right)^2 = 105$

1 pkt – zapisanie równania $x + x + r + x + 5r = 105$

ALBO

– zapisanie równania $(x + r)^2 = x(x + 5r)$,

ALBO

– zapisanie równania $x + x \cdot \dfrac{x + 5r}{x + r} + x \cdot \left(\dfrac{x + 5r}{x + r}\right)^2 = 105$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu III)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5, y = 20, z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą y, np. $y^2 = (2y - 35) \cdot (140 - 3y)$.

2 pkt – zapisanie x oraz z w zależności od y: $x = 2y - 35$, $z = 140 - 3y$.

1 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (y - x) = z - y$ lub $y^2 = xz$, lub $5(y - x) = z - x$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania (dla sposobu IV)

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x = 5, y = 20, z = 80$.

3 pkt – zapisanie równania $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ **oraz** obliczenie q: $q = 4$

ALBO

– zapisanie równania $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ **oraz** zapisanie, że ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$, **oraz** zapisanie równania $q^2 - 5q + 4 = 0$.

2 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ **oraz** zapisanie, że ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$ i $q \neq 1$, **oraz** obliczenie q: $q = 4$

ALBO
– zapisanie równań $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ **oraz** $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$.

1 pkt – zapisanie równania $4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$ lub $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony otrzymanego równania przez wyrażenie zawierające niewiadomą i nie umieszcza zapisu, że to wyrażenie jest różne od zera, oraz konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np. $\frac{a_1 + a_1 + 5r}{2} \cdot 6 = 105$, $y - x = 4 \cdot (z - y)$ i rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie (za spełnienie kryterium z kategorii za 1 pkt oraz za obliczenie x, y oraz z).

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Wtedy $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$.
Ponieważ $x + y + z = 105$, więc

$$x + (x + r) + (x + 5r) = 105$$

$$x + 2r = 35$$

$$x = 35 - 2r$$

Zatem $y = 35 - 2r + r = 35 - r$ oraz $z = 35 - 2r + 5r = 35 + 3r$.
Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$y^2 = x \cdot z$$

$$(35 - r)^2 = (35 - 2r) \cdot (35 + 3r)$$

$$35^2 - 70r + r^2 = 35^2 + 35r - 6r^2$$

$$7r^2 - 105r = 0$$

$$r = 0 \quad \lor \quad r = 15$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy $x = y = z$, więc warunki zadania nie są spełnione.
Dla $r = 15$ otrzymujemy $x = 5, y = 20, z = 80$. Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105. Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ostatecznie $x = 5, y = 20, z = 80$.

Sposób II

Niech r będzie różnicą ciągu arytmetycznego (a_n). Wtedy $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$.
Ponieważ $x + y + z = 105$, więc

$$x + (x + r) + (x + 5r) = 105$$

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$y^2 = x \cdot z$$

Ponieważ $y = x + r$ oraz $z = x + 5r$, więc

$$(x + r)^2 = x \cdot (x + 5r)$$

Zatem otrzymujemy układ dwóch równań z niewiadomymi x oraz r:

$$\begin{cases} x + x + r + x + 5r = 105 \\ (x + r)^2 = x(x + 5r) \end{cases}$$

Ze związku $(x + r)^2 = x \cdot (x + 5r)$ otrzymujemy kolejno:

$$x^2 + 2xr + r^2 = x^2 + 5xr$$

$$r^2 - 3rx = 0$$

$$r = 0 \ \vee \ r = 3x$$

Dla $r = 0$ otrzymujemy $x = y = z$, więc warunki zadania nie są spełnione.
Dla $r = 3x$ otrzymujemy

$$\begin{cases} 3x + 6r = 105 \\ r = 3x \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest para liczb $\begin{cases} x = 5 \\ r = 15 \end{cases}$

Stąd $y = x + r = 5 + 15 = 20$ oraz $z = x + 5r = 5 + 75 = 80$.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105.
Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem ostatecznie $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Sposób III

Z warunków zadania oraz z własności ciągów geometrycznego i arytmetycznego otrzymujemy zależności między x, y oraz z:

$$x + y + z = 105$$

$$y^2 = xz$$

$$4 \cdot (y - x) = z - y$$

Rozwiązujemy układ tych trzech równań:

$$\begin{cases} z = 105 - x - y \\ y^2 = x \cdot (105 - x - y) \\ 4 \cdot (y - x) = 105 - x - y - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 105 - x - y \\ y^2 = x \cdot (105 - x - y) \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 140 - 3y \\ y^2 = (2y - 35) \cdot (140 - 3y) \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 140 - 3y \\ 7y^2 - 385y + 4900 = 0 \\ x = 2y - 35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 80 \\ y = 20 \\ x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 35 \\ y = 35 \\ x = 35 \end{cases}$$

Dla $x = y = z = 35$ warunki zadania nie są spełnione.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105.
Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Sposób IV
Niech q będzie ilorazem ciągu geometrycznego (x, y, z). Wtedy $y = x \cdot q$ oraz $z = x \cdot q^2$. Z warunków zadania oraz własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$4 \cdot (y - x) = z - y$$

$$4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$$

Ponieważ ciąg (x, y, z) jest rosnący, więc $x \neq 0$ i $q \neq 1$. Zatem

$$4 \cdot (x \cdot q - x) = x \cdot q^2 - x \cdot q$$

$$4 \cdot x \cdot (q - 1) = x \cdot q \cdot (q - 1)$$

$$4 = q$$

Z warunków zadania $x + y + z = 105$, więc $x + x \cdot q + x \cdot q^2 = 105$ i dalej $x + x \cdot 4 + x \cdot 4^2 = 105$. Stąd otrzymujemy $x = 5$. Wówczas $y = 5 \cdot 4 = 20$ oraz $z = 5 \cdot 4^2 = 80$.
Ciąg $(5, 20, 80)$ jest geometryczny i rosnący. Suma wyrazów tego ciągu jest równa 105.
Ponadto wyrazy tego ciągu są – odpowiednio – pierwszym, drugim i szóstym wyrazem ciągu arytmetycznego określonego wzorem $a_n = 5 + 15n$, gdzie $n \in \mathbb{N}_+$.
Zatem $x = 5$, $y = 20$, $z = 80$.

Zadanie 12. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 6.5R) stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów; 6.6R) rozwiązuje równania trygonometryczne typu $\sin 2x = \frac{1}{2}$, $\sin 2x + \cos x = 1$, $\sin x + \cos x = 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i poprawne wyniki: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$ oraz $\frac{11\pi}{6}$.

3 pkt – rozwiązanie równań $\sin x = \cos x$ oraz $\sin x = -\frac{1}{2}$ w zbiorze $\mathbb{R}$: $\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$ oraz $\frac{7\pi}{6} + 2k \cdot \pi$ i $\frac{11\pi}{6} + 2k \cdot \pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\sin x = \cos x$ (lub równania $\sin x = -\frac{1}{2}$) w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$: $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{5\pi}{4}$ (lub: $\frac{7\pi}{6}$ oraz $\frac{11\pi}{6}$).

2 pkt – przekształcenie równoważne równania $\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$ do postaci $(\sin x - \cos x)(2\sin x + 1) = 0$.

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus oraz cosinus podwojonego kąta.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający podczas przekształcania równania $\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$ podzieli obie strony równania przez $(\cos x - \sin x)$ bez stosownych założeń i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przekształcamy równanie $\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$ równoważnie, korzystając ze wzorów na sinus oraz cosinus podwojonego kąta, i otrzymujemy:

$$\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$$

$$2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1 + \sin x - \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin x \cdot \cos x + \sin x - \cos x$$

$$0 = (\sin x - \cos x)^2 + \sin x - \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$0 = (\sin x - \cos x)^2 + (\sin x - \cos x) + (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$$

$$0 = (\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x + 1 + \sin x + \cos x)$$

$$0 = (\sin x - \cos x)(2\sin x + 1)$$

$$\sin x = \cos x \quad \text{lub} \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\sin x = \cos x$ w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$.
Zauważmy, że gdyby $\cos x = 0$, to wtedy $\sin x = \cos x = 0$, więc po podstawieniu tych wartości sinusa i cosinusa do tożsamości $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ otrzymalibyśmy $0 + 0 = 1$.
Zatem $\cos x \neq 0$.
Dzielimy obie strony równania $\sin x = \cos x$ przez $\cos x$ i otrzymujemy $\operatorname{tg} x = 1$.
Równanie to ma w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\frac{\pi}{4}$ oraz $\frac{5\pi}{4}$.

Równanie $\sin x = -\frac{1}{2}$ ma w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ dwa rozwiązania: $\frac{7\pi}{6}$ oraz $\frac{11\pi}{6}$.

Ostatecznie równanie $\sin(2x) + \cos(2x) = 1 + \sin x - \cos x$ ma w zbiorze $\langle 0, 2\pi \rangle$ cztery rozwiązania: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{4}$ oraz $\frac{11\pi}{6}$.

Zadanie 13. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 7.4R) znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $15\sqrt{3}+8$ (lub $\sqrt{739+240\sqrt{3}}$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku AC), np.

$17^2 = |AC|^2 + 30^2 - 2\cdot 30\cdot |AC|\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$|AC|^2 = 30^2 + 17^2 - 2\cdot 30\cdot 17\cdot \frac{15-8\sqrt{3}}{34}$,

$30^2 = |AC|^2 + 17^2 - 2\cdot |AC|\cdot 17\cdot \frac{8}{17}$

ALBO

– obliczenie długości odcinków BD oraz AD: $|BD| = 15$ oraz $|AD| = 15\sqrt{3}$ (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie sinusa kąta ABC: $\frac{15\sqrt{3}+8}{34}$ (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta BAC: $30°$.

1 pkt – zapisanie, że kąt BSC ma miarę $60°$

ALBO

– zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta BAC (lub miara kąta ACB), np. $\frac{17}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 34$, $\frac{30}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 34$, $\frac{1}{2}\cdot 30\cdot \sin|\sphericalangle BAC| = \frac{30\cdot 17}{4\cdot 17}$,

ALBO

– zapisanie układu równań: $|AC|^2 = 30^2 + 17^2 - 2\cdot 30\cdot 17\cdot \cos|\sphericalangle ABC|$ oraz $\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 34$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

<u>*Sposób I*</u>

Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, a przez R – promień tego okręgu. Ponieważ $R = 17$ oraz $|BC| = 17$, więc trójkąt BSC jest równoboczny. Punkt A leży na dłuższym z łuków BC okręgu opisanego na trójkącie, gdyż gdyby leżał na krótszym, to wtedy odcinek BC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Zatem miara kąta wpisanego BAC jest połową miary kąta BSC trójkąta równobocznego, czyli $|\sphericalangle BAC| = 30°$.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku AC:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\sphericalangle BAC|$$

$$17^2 = |AC|^2 + 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot |AC| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|AC|^2 - 30\sqrt{3} \cdot |AC| + 611 = 0$$

$$|AC| = 15\sqrt{3} + 8 \quad \vee \quad |AC| = 15\sqrt{3} - 8$$

Ponieważ $15\sqrt{3} - 8 < 30$, więc ostatecznie $|AC| = 15\sqrt{3} + 8$.

Sposób II

Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, a przez R – promień tego okręgu.

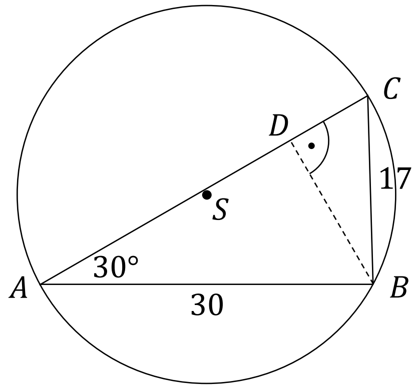
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{17}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 34$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 30°$ lub $|\sphericalangle BAC| = 150°$. Ponieważ bok BC nie jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC, więc kąt leżący naprzeciw tego boku nie może być rozwarty. Zatem $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

Niech D będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka B na bok AC (zobacz rysunek).



Korzystamy ze związków miarowych dla trójkąta o kątach $30°, 60°, 90°$ i otrzymujemy $|BD| = \frac{1}{2} \cdot |AB| = 15$ oraz $|AD| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB| = 15\sqrt{3}$.

Stosujemy do trójkąta BCD twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$|CD| = \sqrt{|CB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

Zatem $|AC| = |AD| + |CD| = 15\sqrt{3} + 8$.

Sposób III

Oznaczmy przez S środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, a przez R – promień tego okręgu.

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{17}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 34$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 30°$ lub $|\sphericalangle BAC| = 150°$. Ponieważ bok BC nie jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC, więc kąt leżący naprzeciw tego boku nie może być rozwarty. Zatem $|\sphericalangle BAC| = 30°$.

Ponownie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i obliczamy sinus kąta ACB:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{30}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 34$$

$$\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{15}{17}$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\sphericalangle ACB| + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \cos^2|\sphericalangle ACB| = 1$$

$$\cos|\sphericalangle ACB| = \frac{8}{17} \quad \vee \quad \cos|\sphericalangle ACB| = -\frac{8}{17}$$

Ponieważ AB nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt ACB nie jest rozwarty i dlatego $\cos|\sphericalangle ACB| = \frac{8}{17}$.

Obliczamy $\sin|\sphericalangle ABC|$:

$$\sin|\sphericalangle ABC| = \sin(180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = \sin(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) =$$

$$= \sin|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \cos|\sphericalangle BAC| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{17} + \frac{15}{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3} + 8}{34}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC| = 34 \cdot \frac{15\sqrt{3}+8}{34} = 15\sqrt{3}+8$$

Uwaga:
Po obliczeniu $\cos|\sphericalangle ACB|$ można obliczyć $\cos|\sphericalangle ABC|$:

$$\cos|\sphericalangle ABC| = \cos(180° - |\sphericalangle BAC| - |\sphericalangle ACB|) = -\cos(|\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ACB|) =$$

$$= -\cos|\sphericalangle BAC| \cdot \cos|\sphericalangle ACB| + \sin|\sphericalangle ACB| \cdot \sin|\sphericalangle BAC| =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{17} + \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15 - 8\sqrt{3}}{34}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\sphericalangle ABC|$$

$$|AC|^2 = 30^2 + 17^2 - 2 \cdot 30 \cdot 17 \cdot \frac{15 - 8\sqrt{3}}{34}$$

$$|AC| = \sqrt{739 + 240\sqrt{3}}$$

$$|AC| = \sqrt{\left(8 + 15\sqrt{3}\right)^2}$$

$$|AC| = 8 + 15\sqrt{3}$$

Zadanie 14. (0–5)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Użycie i tworzenie strategii.	Zdający: 8.6) oblicza odległość dwóch punktów. 8.1R) oblicza odległość punktu od prostej.

Zasady oceniania

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $S=(6,7)$ oraz $S=(-4,-3)$.

4 pkt – obliczenie obydwu wartości x_S: 6 oraz (-4)

ALBO

– obliczenie obydwu współrzędnych punktu S tylko dla jednego przypadku: $S=(6,7)$ albo $S=(-4,-3)$.

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (współrzędną punktu S), np.

$(x_S-1)^2+(x_S+1-2)^2=50$, $\dfrac{|2x_S-(x_S+1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$,

$(x_S-(-5))^2+(x_S+1-(-1))^2=5$,

$(x_S-(-2))^2+(x_S+1-(-4))^2=5$,

$(x_S-4)^2+(x_S+1-8)^2=5$,

$(x_S-7)^2+(x_S+1-5)^2=5$.

2 pkt – obliczenie długości m odcinka AB (lub AC) stycznej: $3\sqrt{5}$

ALBO

– obliczenie długości odcinka AS: $|AS|=5\sqrt{2}$.

1 pkt – zapisanie współrzędnych punktu S w zależności od jednej zmiennej, np.

$S=(x,x+1)$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością m odcinka AB stycznej), np.

$15=2\cdot\frac{1}{2}\cdot m\cdot\sqrt{5}$,

ALBO

– zapisanie układ trzech równań:

$|z|^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos\alpha$ oraz

$|z|^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$ oraz

$15=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot\sin(180^\circ-\alpha)$,

gdzie $z=|BC|$, $a=|AB|$, $\alpha=|\sphericalangle BAC|$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

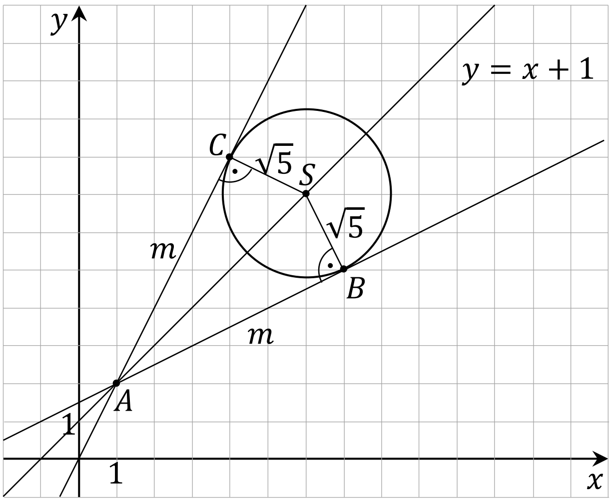
1. Jeżeli zdający pomija współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta lub deltoidu, to błąd ten traktujemy jako błąd rachunkowy.

2. Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca, ale otrzyma więcej niż dwa punkty S, to może otrzymać co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Promienie BS oraz CS okręgu poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do stycznych – odpowiednio – AB i AC, więc trójkąty ABS oraz ACS są prostokątne. Ponadto odcinki AB oraz AC mają równe długości, więc trójkąty te są przystające (na podstawie cechy bbb przystawania trójkątów). Oznaczmy $m = |AB| = |AC|$ (zobacz rysunek).



Pole P_{ABSC} czworokąta $ABSC$ jest sumą pól trójkątów przystających ABS oraz ACS, więc

$$P_{ABSC} = P_{ABS} + P_{ACS}$$

$$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$$

$$m = 3\sqrt{5}$$

Z twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABS otrzymujemy

$$|AS|^2 = |AB|^2 + |BS|^2 = \left(3\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2 = 50$$

Niech x_S będzie pierwszą współrzędną punktu S. Punkt S leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, więc $S = (x_S\,, x_S + 1)$.
Wtedy

$$(x_S - 1)^2 + (x_S + 1 - 2)^2 = 50$$

Stąd dalej otrzymujemy

$$(x_S - 1)^2 = 25$$

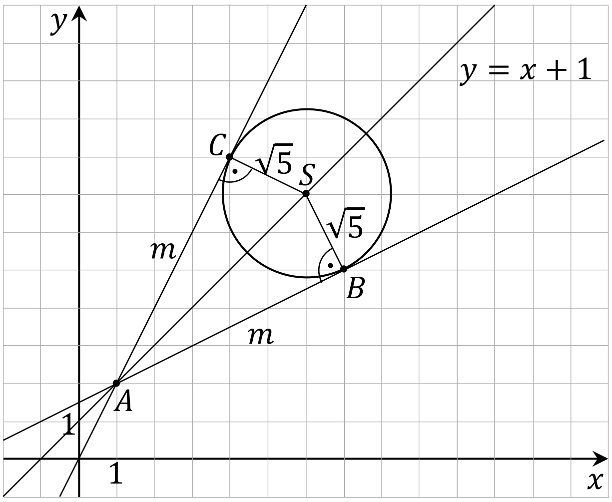
$$|x_S - 1| = 5$$

$$x_S = 6 \quad \vee \quad x_S = -4$$

Zatem $S = (6, 7)$ lub $S = (-4, -3)$.

Sposób II

Promienie BS oraz CS okręgu poprowadzone do punktów styczności są prostopadłe do stycznych – odpowiednio – AB i AC, więc trójkąty ABS oraz ACS są prostokątne. Ponadto odcinki AB oraz AC mają równe długości, więc trójkąty te są przystające (na podstawie cechy bbb przystawania trójkątów). Oznaczmy $m = |AB| = |AC|$ (zobacz rysunek).



Pole P_{ABSC} czworokąta $ABSC$ jest sumą pól trójkątów przystających ABS oraz ACS, więc

$$P_{ABSC} = P_{ABS} + P_{ACS}$$

$$15 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{5}$$

$$m = 3\sqrt{5}$$

Niech x_S będzie pierwszą współrzędną punktu S. Punkt S leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, więc $S = (x_S, x_S + 1)$.

Zauważmy, że punkt A leży na prostej o równaniu $y = x + 1$. Każda prosta przechodząca przez punkt $A = (1, 2)$, poza prostą równoległą do osi Oy, ma równanie postaci $y = a(x - 1) + 2$. Tangens kąta, jaki tworzy każda ze stycznych AB oraz AC z prostą o równaniu $y = x + 1$, jest równy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{5}}{m} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$$

Stąd i ze wzoru na tangens kąta między prostymi otrzymujemy

$$\frac{1}{3} = \operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{a-1}{a+1}\right|$$

$$a + 1 = 3(a - 1) \quad \vee \quad a + 1 = -3(a - 1)$$

$$a = 2 \quad \vee \quad a = \frac{1}{2}$$

Zatem styczne AB oraz AC mają równania postaci $y = 2(x - 1) + 2$ oraz $y = \frac{1}{2}(x - 1) + 2$, czyli $2x - y = 0$ oraz $x - 2y + 3 = 0$.

Odległość punktu S od każdej ze stycznych AB i AC jest równa $\sqrt{5}$. Zatem

$$\frac{|2x_S - (x_S + 1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

$$|x_S - 1| = 5$$

$$x_S = 6 \quad \vee \quad x_S = -4$$

Istnieją dwa punkty spełniające warunki zadania: $S = (6, 7)$ oraz $S = (-4, -3)$.

Zadanie 15. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 3.1R) stosuje wzory Viète'a; 3.2R) rozwiązuje równania i nierówności liniowe i kwadratowe z parametrem.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:
Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
4 pkt – rozwiązanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi
$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$: $m \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right\rangle$.
3 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi
$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ w postaci $W(m) \leq 0$, gdzie $W(m)$ jest iloczynem co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np.
$(3m-1)(3m+1)^2 \leq 0$, $(9m^2-1)(3m+1) \leq 0$, $27\left(m - \frac{1}{3}\right)\left(m + \frac{1}{3}\right)^2 \leq 0$
ALBO
– zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi
$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ w postaci
$27m^3 + 9m^2 - 3m - 1 \leq 0$ **oraz** wyznaczenie jednego z pierwiastków wielomianu $27m^3 + 9m^2 - 3m - 1$.
2 pkt – zapisanie nierówności z jedną niewiadomą m równoważnej warunkowi
$x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$, np.
$(3m+1)^3 - 9 \cdot (2m^2 + m + 1) \leq 3m - 7$.
1 pkt – przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np.
$(x_1 + x_2)^3 - 9x_1x_2 \leq 3m - 7$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie dwa warunki: $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$: $m \in (-\infty, -3)$.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
1 pkt – poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $\Delta > 0$ i $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$: $m \in (-\infty, -3)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający w etapie I lub II popełni błąd, który nie jest błędem rachunkowym, to za III etap otrzymuje **0 punktów**.

2. Jeżeli zdający w etapach I i II nie popełni błędów innych niż rachunkowe i otrzyma zbiory rozwiązań, które nie są rozłączne i żaden z nich nie jest zbiorem liczb rzeczywistych, a następnie poprawnie wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań z etapów I i II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd – przyjmie, że $x_1 + x_2 = \pm(2m^2 + m + 1)$ lub $x_1 \cdot x_2 = \pm(3m + 1)$, lub $x_1 + x_2 = \pm\frac{b}{2a}$, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty (**1 punkt za przekształcenie nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania popełni błąd, który nie jest rachunkowy, np.:

- pominie istotne nawiasy przy przekształcaniu nierówności $x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2 - 3) \leq 3m - 7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a,
- przyjmie, że $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2]$,
- przyjmie, że $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3$,

  i konsekwentnie do popełnionego błędu doprowadzi rozwiązanie II etapu zadania do końca, to może uzyskać co najwyżej **2 punkty** za II etap (1 punkt za zastosowanie wzorów Viète'a oraz 1 punkt za <u>konsekwentne</u> rozwiązanie nierówności do końca), a za III etap otrzymuje **0 punktów**.

5. Jeżeli w II etapie rozwiązania zdający popełni błędy i otrzyma nierówność $V(m) \leq 0$, to za podanie zbioru rozwiązań nierówności otrzymuje **1 punkt** tylko wtedy, gdy wielomian V jest stopnia trzeciego i ma co najmniej dwa różne pierwiastki rzeczywiste.

6. Jeżeli zdający wprowadza dodatkowe założenie, które nie wynika z warunków zadania (np. $x_1 + x_2 > 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$), to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **5 punktów** (co najwyżej 1 punkt za I etap i co najwyżej 4 punkty za II etap).

Przykładowe pełne rozwiązanie

I etap

Trójmian kwadratowy $x^2-(3m+1)x+2m^2+m+1$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik tego trójmianu jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta>0$:

$$[-(3m+1)]^2-4\cdot 1\cdot(2m^2+m+1)>0$$

$$m^2+2m-3>0$$

$$(m-1)\cdot(m+3)>0$$

$$m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$$

II etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^3+x_2^3+3\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2-3)\leq 3m-7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$x_1^3+x_2^3+3\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_1+x_2-3)\leq 3m-7$$

$$(x_1+x_2)^3-9x_1x_2\leq 3m-7$$

$$(3m+1)^3-9\cdot(2m^2+m+1)\leq 3m-7$$

$$27m^3+9m^2-3m-1\leq 0$$

$$(3m)^3-1^3+9m^2-3m\leq 0$$

$$(3m-1)(9m^2+3m+1)+3m(3m-1)\leq 0$$

$$(3m-1)(9m^2+6m+1)\leq 0$$

$$(3m-1)(3m+1)^2\leq 0$$

$$m\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right\rangle$$

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, które jednocześnie spełniają warunki $m\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ oraz $m\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right\rangle$: $m\in(-\infty,-3)$.

Zadanie 16. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Modelowanie matematyczne.	Zdający: 11.6R) stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych.

Zasady oceniania

Część a)

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie wysokości H graniastosłupa w zależności od długości krawędzi podstawy, np. $H=\frac{13824}{a^2\sqrt{3}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż graniastosłup prawidłowy trójkątny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający przeprowadzi rozumowanie tylko dla $a=8\sqrt{3}$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie części a).

Część b)

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a=8\sqrt{3}$ i obliczenie wartości najmniejszej funkcji P: $96\sqrt{3}+1728$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja P przyjmuje wartość najmniejszą dla $a=8\sqrt{3}$

ALBO

– zapisanie, że dla $a=8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą i obliczenie $P(8\sqrt{3})$: $P(8\sqrt{3})=96\sqrt{3}+1728$.

2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $a\sqrt{3}-\frac{13824\sqrt{3}}{a^2}=0$: $a=24$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji P: $P'(a)=a\sqrt{3}-\frac{13824\sqrt{3}}{a^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi do części b):

1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji P z błędem, ale wyznaczona pochodna ma postać $Aa+\frac{B}{a^2}$, gdzie A oraz B są liczbami niewymiernymi, lub postać ułamka, w którego liczniku jest wielomian stopnia trzeciego, a w mianowniku ma^2, i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie części b) (za miejsce zerowe pochodnej, za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji oraz za obliczenie najmniejszej wartości funkcji P).

Jeżeli natomiast otrzyma inną błędną postać pochodnej, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie części b) (za miejsce zerowe pochodnej oraz za uzasadnienie istnienia najmniejszej wartości funkcji P).

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.

3. Jeżeli zdający otrzyma miejsce zerowe pochodnej, które należy do przedziału $(0, 8\sqrt{3})$, to może otrzymać za część b) co najwyżej **1 punkt** (za wyznaczenie pochodnej albo za obliczenie miejsca zerowego pochodnej).

4. Za poprawne uzasadnienie, że funkcja P osiąga wartość najmniejszą dla $a = 8\sqrt{3}$ można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz zapisuje słownie lub graficznie, że funkcja P jest malejąca w przedziale $(0, a_0)$, gdzie a_0 jest miejscem zerowym pochodnej funkcji f, będącej rozszerzeniem funkcji P na zbiór $(0, +\infty)$.

5. Jeżeli zdający błędnie uzasadnia, że dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą, to nie otrzymuje punktu za obliczenie $P(8\sqrt{3})$.

Przykładowe pełne rozwiązanie

a)

Rozpatrzmy dowolny z rozważanych graniastosłupów. Oznaczmy jego wysokość przez H. Korzystamy ze wzoru na objętość graniastosłupa oraz wzoru na pole trójkąta równobocznego i otrzymujemy:

$$3456 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$H = \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$$

Stąd oraz ze wzoru na pole powierzchni całkowitej graniastosłupa dostajemy

$$P = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3aH$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot \frac{4608\sqrt{3}}{a^2}$$

$$P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$$

b)

Obliczamy najmniejszą wartość funkcji P określonej wzorem $P(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a}$ dla $a \in (0, 8\sqrt{3}\rangle$.

Wyznaczamy pochodną funkcji P: $P'(a) = a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2}$ dla $a \in (0, 8\sqrt{3}\rangle$.

Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji P:

$$P'(a) = 0$$

$$a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} = 0$$

$$a^3\sqrt{3} - 13824\sqrt{3} = 0$$

$$a^3 = 13824 = 24^3$$

$$a = 24 \notin \left(0, 8\sqrt{3}\right\rangle$$

Badamy znak pochodnej:

$$P'(a) < 0$$

$$a\sqrt{3} - \frac{13824\sqrt{3}}{a^2} < 0$$

$$a^3\sqrt{3} - 13824\sqrt{3} < 0$$

$$a^3 < 13824$$

$$a < 24$$

więc $P'(a) < 0$ dla $a \in \left(0, 8\sqrt{3}\right\rangle$.

Zatem funkcja P jest malejąca w przedziale $\left(0, 8\sqrt{3}\right\rangle$.

Stąd dla $a = 8\sqrt{3}$ funkcja P osiąga wartość najmniejszą równą

$$P\left(8\sqrt{3}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{a} = \frac{\left(8\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{13824\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = 96\sqrt{3} + 1728.$$