

**EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2015/2016**

**FORMUŁA DO 2014
(„STARA MATURA”)**

**MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1**

MAJ 2016

Ogólne zasady oceniania

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 1. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poprawna odp. (1 p.)	
		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych oraz stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych i rzeczywistych (1.g).	A	D

Zadanie 2. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 3. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 4. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		A	D

Zadanie 5. (0–1)

Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 6. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający interpretuje geometrycznie układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi (8.d).	Wersja I	Wersja II
		C	A

Zadanie 7. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający korzysta ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (7.a).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 8. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje interpretację współczynników we wzorze funkcji liniowej (4.g).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 9. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje proste równania wymierne, prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych, np. $\frac{x+1}{x+3}=2$, $\frac{x+1}{x}=2x$ (3.e).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 10. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji zbiór wartości (4.b).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 11. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.k).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 12. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu (4.2).	Wersja I	Wersja II
		B	D

Zadanie 13. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii (7.c).	Wersja I	Wersja II
		A	C

Zadanie 14. (0–1)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.c).	Wersja I	Wersja II
		A	B

Zadanie 15. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	5. Ciągi liczbowe. Zdający bada, czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny (5.b).	Wersja I	Wersja II
		D	C

Zadanie 16. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 17. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych, wyznacza wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego (6.d).	Wersja I	Wersja II
		C	B

Zadanie 18. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).	Wersja I	Wersja II
		D	A

Zadanie 19. (0–1)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 20. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostokątowość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.c).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 21. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.f).	Wersja I	Wersja II
		B	C

Zadanie 22. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.d).	Wersja I	Wersja II
		C	B

Zadanie 23. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	Wersja I	Wersja II
		D	B

Zadanie 24. (0–1)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach z zastosowaniem trygonometrii (9.b).	Wersja I	Wersja II
		B	A

Zadanie 25. (0–1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę i odchylenie standardowe danych; interpretuje te parametry dla danych empirycznych (10.a).	Wersja I	Wersja II
		C	D

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci sumy przedziałów (3.a).
--	---

Przykładowe rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania:

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 + 5x - 3$.

- Obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2 = 49 \text{ i stąd } x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3 \text{ oraz } x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2},$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{2} \text{ oraz } x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}, \text{ stąd } x_1 = -3 \text{ oraz } x_2 = \frac{1}{2},$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub zaznaczając je na wykresie $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Drugi etap rozwiązania:

Szkicujemy parabolę, której ramiona skierowane są ku górze i zaznaczamy na osi Ox miejsca zerowe trójmianu.

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ lub $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$,

lub $(x < -3 \text{ lub } x > \frac{1}{2})$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 p.
gdy:

- poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $2x^2 + 5x - 3$:
 $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- popełni błędy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionych błędów rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $(-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ lub $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
lub $(x < -3 \text{ lub } x > \frac{1}{2})$.

albo

- sporządzi ilustrację graficzną (oś liczbowa, parabola) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < -3$, $x > \frac{1}{2}$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Uwaga:

Jeśli pierwiastki trójmianu są wyznaczone przy zastosowaniu błędnej metody, to za całe rozwiązanie zdający otrzymuje **0 punktów**.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Akceptujemy zapis przedziałów nieuwzględniający porządku liczb na osi liczbowej lub błędów w przepisaniu, np.: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (-3, +\infty)$ lub $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (3, +\infty)$, lub $(-\infty, 3) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

Zadanie 27. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania wielomianowe metodą rozkładu na czynniki (3.d).
--	--

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów $x^2(x+3)+2(x+3)=0$ lub $x(x^2+2)+3(x^2+2)=0$, stąd $(x+3)(x^2+2)=0$.

Ponieważ wyrażenie x^2+2 jest dodatnie, więc $x=-3$.

II sposób

Stwierdzamy, że liczba -3 jest pierwiastkiem wielomianu x^3+3x^2+2x+6 . Dzielimy ten wielomian przez dwumian $(x+3)$ i otrzymujemy iloraz (x^2+2) . Mamy więc równanie postaci $(x+3)(x^2+2)=0$, a stąd otrzymujemy $x=-3$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje1 p.

- gdy zapisze lewą stronę równania w postaci iloczynowej, np.: $(x+3)(x^2+2)=0$

albo

- gdy podzieli wielomian x^3+3x^2+2x+6 przez dwumian $(x+3)$, otrzyma iloraz (x^2+2)

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 p.

gdy wyznaczy rozwiązanie równania: $x=-3$.

Zadanie 28. (0–2)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	3. Trygonometria. Zdający stosuje proste związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (6.c).
---	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

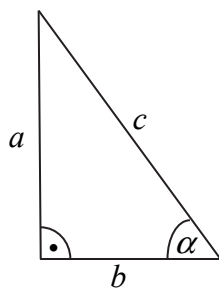
Przekształcamy wyrażenie $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$, stosując wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy i otrzymujemy $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$.

Korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, otrzymujemy $1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{3}{2}$, a stąd

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ a zatem } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}.$$

II sposób

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych a i b oraz zaznaczamy kąt osty α taki, że $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ lub $\cos \alpha = \frac{b}{c}$.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ponieważ $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{3}{2}$, więc $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)^2 = \frac{3}{2}$, czyli $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$.

Stąd $\frac{c^2 + 2ab}{c^2} = 1 + \frac{2ab}{c^2} = \frac{3}{2}$, zatem $\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4}$.

Ponieważ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ i $\cos \alpha = \frac{b}{c}$, to $\frac{ab}{c^2} = \frac{1}{4}$. Zatem $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje 1 p.

- gdy przekształci wyrażenie $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ do postaci $\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha$

albo

- gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b , zaznaczy w tym trójkącie kąt α i zapisze $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ oraz $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje.....2 p.

gdy obliczy, że $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Uwaga:

Jeżeli zdający błędnie wyznaczy funkcje trygonometryczne do kąta wskazanego na rysunku i z tego korzysta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 29. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach (7.b).
--------------------------------	---

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Niech $|\sphericalangle ACB| = \alpha$.

Ponieważ $|\sphericalangle CAB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \alpha$.

W $\triangle CDE$: $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Trójkąt CDE jest prostokątny oraz $|\sphericalangle DEC| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle CDE| = 90^\circ - \alpha$.

Podobnie trójkąt BFG jest prostokątny i $|\sphericalangle FGB| = 90^\circ$, więc $|\sphericalangle BFG| = \alpha$.

Ponieważ trójkąty CDE i BFG mają równe kąty, więc na podstawie cechy podobieństwa kkk są podobne.

II sposób

Niech $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$.

Trójkąt CED jest podobny do trójkąta ABC (cecha kkk), bo $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DCE| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle DEC| = 90^\circ$.

Podobnie trójkąt GBF jest podobny do trójkąta ABC , (cecha kkk), bo $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle FBG| = \beta$ oraz $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle FGB| = 90^\circ$.

Stąd trójkąt CED jest podobny do trójkąta FBG (z przechodniości relacji podobieństwa).

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy

- wskaże w dwóch trójkątach spośród trójkątów CBA , CDE i FBG jedną parę równych kątów ostrych i na tym zakończy lub dalej popełni błędy, przy czym kąt przy wierzchołku B musi być wskazany dwukrotnie, jako kąt w obu trójkątach CBA i FBG , np. zdający zapisze $|\sphericalangle FBG| = |\sphericalangle CBA|$ lub stwierdzi, że jest to wspólny kąt trójkątów CBA i FBG (analogicznie z kątem przy wierzchołku C w trójkątach CBA i CDE)

albo

- zapisze, że trójkąt CBA jest podobny do trójkąta FBG i do trójkąta CDE i stąd wywnioskuje, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG , ale nie wskaże żadnej pary równych kątów ostrych w tych trójkątach

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje **2 p.**
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwagi:

- Jeżeli zdający przyjmie konkretne miary kątów, to otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający przyjmie błędne zależności między kątami, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający posługuje się wzorami skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ (2.a).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Rozważmy wyraz $a_n = 2n^2 + 2n$.

Wyraz a_{n+1} można zapisać, jako

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 + 2(n+1) = 2n^2 + 6n + 4.$$

Wtedy

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2n^2 + 6n + 4 = 4n^2 + 8n + 4.$$

Zatem

$$a_n + a_{n+1} = (2n+2)^2.$$

Liczba $2n+2$ jest naturalna. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje **1 p.**
gdy poprawnie zapisze sumę dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu, np:

$$a_n + a_{n+1} = 2n^2 + 2n + 2(n+1)^2 + 2(n+1)$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga:

Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość tezy tylko dla konkretnych wartości n , to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego (5.c).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Wykorzystujemy wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i zapisujemy

równanie z niewiadomą n : $S_n = \frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$.

Obliczamy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego n : $n = 42$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje..... 1 p.
gdy zapisze

- równanie z niewiadomą n : $\frac{7+89}{2} \cdot n = 2016$

albo

- układ równań z niewiadomymi n i r :
$$\begin{cases} 7 + (n-1)r = 89 \\ 2016 = \frac{2 \cdot 7 + (n-1)r}{2} \cdot n \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..... 2 p.
gdy obliczy liczbę wyrazów ciągu arytmetycznego: 42.

Zadanie 32. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich (7.c).
-----------------------------------	---

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Niech α oznacza najmniejszy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha + 50^\circ$ oraz 3α . Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc

$$\begin{aligned}\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 130^\circ, \\ \alpha &= 26^\circ.\end{aligned}$$

Stąd $\alpha + 50^\circ = 76^\circ$ oraz $3\alpha = 78^\circ$.

II sposób

Niech α oznacza największy kąt trójkąta. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3}$.

Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 390^\circ, \\ \alpha &= 78^\circ.\end{aligned}$$

Stąd $\frac{\alpha}{3} = 26^\circ$ oraz $\frac{\alpha}{3} + 50^\circ = 76^\circ$.

III sposób

Niech α oznacza ten kąt trójkąta, który nie jest ani największy, ani najmniejszy. Zatem pozostałe dwa kąty tego trójkąta równe są $\alpha - 50^\circ$ oraz $3(\alpha - 50^\circ)$. Suma kątów trójkąta jest równa 180° , więc

$$\begin{aligned}\alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) &= 180^\circ, \\ 5\alpha &= 380^\circ, \\ \alpha &= 76^\circ.\end{aligned}$$

Stąd $\alpha - 50^\circ = 26^\circ$ oraz $3(\alpha - 50^\circ) = 78^\circ$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.

Zdający zapisze:

- kąty trójkąta w zależności od jednego kąta, np.:

$$\alpha, \alpha + 50^\circ, 3\alpha \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{3} + 50^\circ, \alpha, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ, \alpha, 3(\alpha - 50^\circ)$$

albo

- układ dwóch równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 50^\circ + \beta = 180^\circ \\ \beta = 3\alpha, \end{cases}$$

albo

- układ trzech równań, np.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \gamma = 3\alpha \\ \beta = \alpha + 50^\circ \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\alpha + 3\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ \quad \text{lub} \quad \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} + 50^\circ + \alpha = 180^\circ, \quad \text{lub} \quad \alpha - 50^\circ + \alpha + 3(\alpha - 50^\circ) = 180^\circ$$

i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający obliczy jeden z kątów trójkąta, np.: $\alpha = 26^\circ$ lub $\alpha = 78^\circ$, lub $\alpha = 76^\circ$ i na tym zakończy lub dalej popęlnia błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy wszystkie kąty trójkąta.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda kąty (26° , 76° , 78°), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający tylko poda kąty i sprawdzi wszystkie warunki zadania, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 33. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje zadania (również umieszczone w kontekście praktycznym), prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (3.b).
-----------------------------------	--

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmujemy oznaczenia:

x – początkowa liczba osób planujących wyjazd, gdzie x jest liczbą naturalną dodatnią;

y – początkowy koszt wynajęcia busa przypadający na jednego uczestnika biwaku, $y > 16$.

Zapisujemy zależność między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a ostatecznym jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.: $(x + 2) \cdot (y - 16) = 960$.

Zapisujemy układ równań, np.
$$\begin{cases} x \cdot y = 960 \\ (x + 2) \cdot (y - 16) = 960 \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y = \frac{960}{x},$	$x = \frac{960}{y},$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x + 2) \cdot \left(\frac{960}{x} - 16 \right) = 960.$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: $x^2 + 2x - 120 = 0$. Obliczamy $\Delta = 4 + 480 = 22^2$, $x_1 = \frac{-2 - 22}{2} = -12$, co jest sprzeczne z założeniem $x > 0$, $x_2 = \frac{-2 + 22}{2} = 10$. Obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak $x + 2 = 12$.	$\left(\frac{960}{y} + 2 \right) \cdot (y - 16) = 960.$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np.: $y^2 - 16y - 7680 = 0$. Obliczamy $\Delta = 256 + 30720 = 176^2$, $y_1 = \frac{16 - 176}{2} = -80$, co jest sprzeczne z założeniem $y > 16$, $y_2 = \frac{16 + 176}{2} = 96$. Obliczamy początkową liczbę osób planujących wyjazd $x = \frac{960}{96} = 10$ oraz obliczamy liczbę osób, które wyjechały na biwak $x + 2 = 12$.
Odpowiedź: Ostatecznie na biwak wyjechało 12 osób.	

Schemat punktowania**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** **1 p.**

Zapisanie zależności między ostateczną liczbą osób uczestniczących w wyjeździe, a jednostkowym kosztem wynajęcia busa, np.: $(x+2) \cdot (y-16) = 960$, gdzie x oznacza początkową liczbę osób planujących wyjazd, a y – jednostkowy początkowy koszt wynajęcia busa.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp **2 p.**

Zdający zapisze układ równań z niewiadomymi x i y – odpowiednio z początkową liczbę osób planujących wyjazd i jednostkowym początkowym kosztem wynajęcia busa:

$$\begin{cases} x \cdot y = 960 \\ (x+2) \cdot (y-16) = 960. \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania **3 p.**

Zdający sprowadzi układ równań do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(x+2) \cdot \left(\frac{960}{x} - 16 \right) = 960 \text{ lub } \left(\frac{960}{y} + 2 \right) \cdot (y-16) = 960, \text{ lub } x^2 + 2x - 120 = 0, \\ \text{lub } y^2 - 16y - 7680 = 0.$$

Uwaga:

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) **4 p.**

Zdający

- rozwiąże równanie z niewiadomą x z błędem rachunkowym i konsekwentnie obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą x i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- rozwiąże równanie z niewiadomą y i nie obliczy liczby osób uczestniczących w biwaku,

albo

- obliczy y z błędem rachunkowym i konsekwentnie obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku.

Rozwiązanie pełne **5 p.**

Zdający obliczy liczbę osób uczestniczących w biwaku: 12.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający tylko poda rozwiązanie, to może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający założy, że koszt jest liczbą całkowitą, rozpatrzy rozkłady liczby 960 na iloczyn dwóch czynników, wśród których są rozkłady:

$$10 \cdot 96 = 960$$

$$12 \cdot 80 = 960$$

i poda poprawną odpowiedź, to może otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

3. Jeżeli zdający przyjmie x jako liczbę osób, które ostatecznie pojechały na biwak i poda $x + 2 = 14$, to może otrzymać maksymalnie **4 punkty**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Jeżeli zdający popełni błąd (np.: $x_2 = \frac{2+22}{2} = 12$ lub rachunkowy) w wyznaczaniu pierwiastków równania kwadratowego, przy czym otrzyma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów.
2. Jeżeli zdający otrzyma poprawne równanie wymierne, a następnie przekształci je z błędem do równania kwadratowego i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać 5 punktów, o ile otrzymane równanie ma przynajmniej jedno rozwiązanie naturalne.

Zadanie 34. (0–4)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych; stosuje zasadę mnożenia, wykorzystuje własności prawdopodobieństwa i stosuje twierdzenie znane jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (10.b,d).
--------------------------------	--

Przykładowe rozwiązaniaI sposób

Zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para (x, y) dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90 \cdot 89$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14), (17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10)$.

Ich liczba jest równa $|A| = 10$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

II sposób

Zdarzeniem elementarnym jest zbiór dwuelementowy $\{x, y\}$ dwóch różnych liczb ze zbioru $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$, który zawiera 90 liczb. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \binom{90}{2} = \frac{90!}{88! \cdot 2!} = \frac{90 \cdot 89}{2} = 4005$. Wszystkie zdarzenia elementarne są równo

prawdopodobne. Mamy więc do czynienia z modelem klasycznym.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma wylosowanych liczb jest 30. Zatem zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$\{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\}$.

Ich liczba jest równa $|A| = 5$.

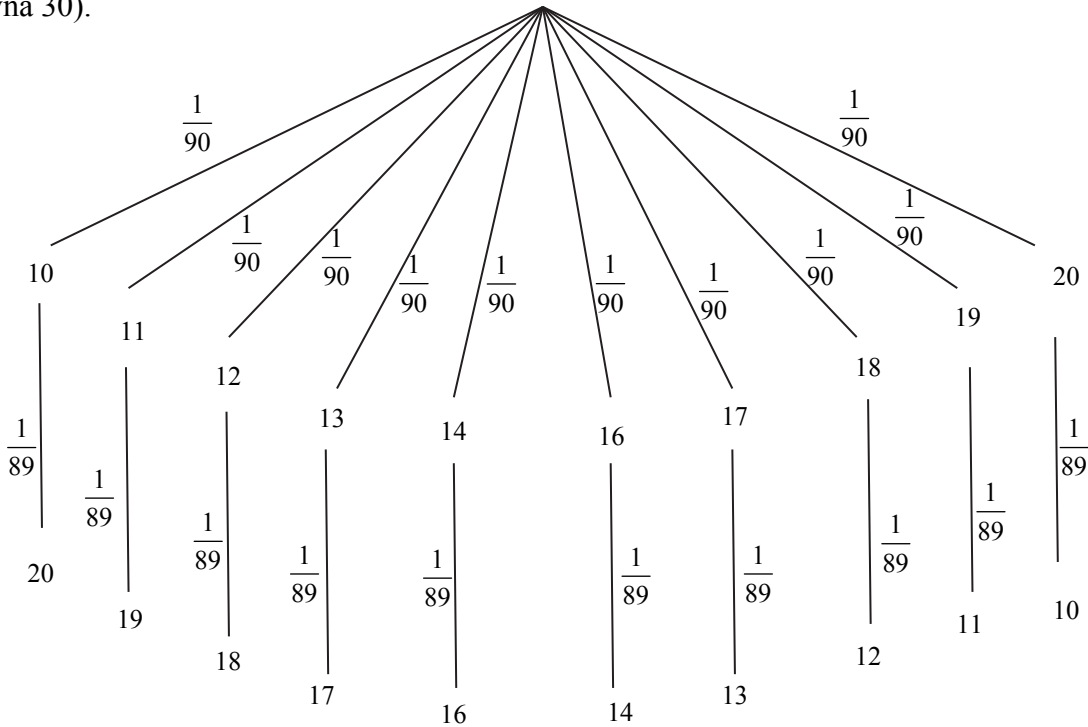
Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{45 \cdot 89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

III sposób

Rysujemy drzewo z uwzględnieniem wszystkich gałęzi, które prowadzą do sytuacji sprzyjających zdarzeniu A (polegającemu na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30).



Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = 10 \cdot \frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{9 \cdot 89} = \frac{1}{801}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy dwie różne liczby dwucyfrowe, których suma jest równa 30 jest równe $\frac{1}{801}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania..... 1 p.

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90

albo

- wypisze zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A :
 $(10, 20), (11, 19), (12, 18), (13, 17), (14, 16), (16, 14), (17, 13), (18, 12), (19, 11), (20, 10)$

lub $\{10, 20\}, \{11, 19\}, \{12, 18\}, \{13, 17\}, \{14, 16\},$

albo

- zapisze, że $|A| = 10$ lub $|A| = 5,$

albo

- narysuje drzewo ilustrujące przebieg doświadczenia (na rysunku muszą wystąpić wszystkie istotne gałęzie)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zdający

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A :
 $(10,20), (11,19), (12,18), (13,17), (14,16), (16,14), (17,13), (18,12), (19,11), (20,10)$
 lub $\{10,20\}, \{11,19\}, \{12,18\}, \{13,17\}, \{14,16\}$

albo

- zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90 oraz zapisze, że $|A|=10$ lub $|A|=5$,

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90 \cdot 89$ lub $|\Omega|=\binom{90}{2}$, lub $|\Omega|=\frac{90 \cdot 89}{2}$, lub $|\Omega|=4005$,

albo

- narysuje drzewo ze wszystkimi istotnymi gałęziami i zapisze prawdopodobieństwa na wszystkich istotnych odcinkach jednego z etapów lub na jednej z istotnych gałęzi

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zdający

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=90 \cdot 89$ oraz zapisze, że $|A|=10$

albo

- obliczy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega|=\binom{90}{2}$ lub $|\Omega|=\frac{90 \cdot 89}{2}$, lub $|\Omega|=4005$ oraz zapisze, że $|A|=5$,

albo

- obliczy prawdopodobieństwo wzdłuż jednej istotnej gałęzi narysowanego drzewa:
 $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne 4 p.

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{801}$.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych, ale przy wyznaczaniu liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A pominie jedno zdarzenie elementarne lub popełni błąd przy zliczaniu poprawnie wypisanych zdarzeń elementarnych

sprzyjającym zdarzeniu A i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

2. Jeżeli zdający błędnie zapisze, że wszystkich liczb dwucyfrowych jest 89 i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli w rozwiązaniu występuje sprzeczność modeli probabilistycznych, to zdający może otrzymać, co najwyżej **2 punkty**.
4. Akceptujemy sytuacje, gdy zdający zamiast wypisywania zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A zapisze następujące sumy $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$, $16+14$, $17+13$, $18+12$, $19+11$, $20+10$ (lub tylko $10+20$, $11+19$, $12+18$, $13+17$, $14+16$).
5. Jeżeli zdający zapisze, że wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych jest 90, ale przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A , zapisuje sumę $15+15$ i na tym zakończy to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający bez żadnych obliczeń poda tylko wynik, np. $\frac{1}{801}$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.