CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2016/2017

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM PODSTAWOWY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-P1

MAJ 2017

Zadania zamknięte

Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.

Zadanie 1. (0−1)

Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**	**Poprawna odp. (1 p.)**	
		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**A**	**B**

Zadanie 2. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający posługuje się w obliczeniach pierwiastkami dowolnego stopnia i stosuje prawa działań na pierwiastkach (1.3).	**C**	**D**

Zadanie 3. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**A**	**D**

Zadanie 4. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
III. Modelowanie matematyczne.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**A**	**B**

Zadanie 5. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).	**C**	**D**

Zadanie 6. (0−1)

		Wersja I	**Wersja II**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	**D**	**C**

Zadanie 7. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji</td><td rowspan="2">3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>D</td><td>A</td></tr></table>

Zadanie 8. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.</td><td rowspan="2">3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x + 1)(x – 7) = 0$ (3.7).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td></tr></table>

Zadanie 9. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>C</td><td>D</td></tr></table>

Zadanie 10. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">I. Wykorzystanie i tworzenie informacji</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieje) (4.10).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>C</td><td>A</td></tr></table>

Zadanie 11. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.</td><td rowspan="2">4. Funkcje. Zdający szkicuje wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw (4.14).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>D</td><td>B</td></tr></table>

Zadanie 12. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>B</td><td>C</td></tr></table>

Zadanie 13. (0−1)

<table><tr><td rowspan="2">III. Modelowanie matematyczne.</td><td rowspan="2">5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na n-ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).</td><td>Wersja I</td><td>Wersja II</td></tr><tr><td>A</td><td>B</td></tr></table>

Zadanie 14. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ oraz $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ (6.4).	**B**	**C**

Zadanie 15. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**C**	**D**

Zadanie 16. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje cechy podobieństwa trójkątów (7.3).	**B**	**A**

Zadanie 17. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
III. Modelowanie matematyczne.	7. Planimetria. Zdający korzysta z własności funkcji trygonometrycznych w łatwych obliczeniach geometrycznych, w tym ze wzoru na pole trójkąta ostrokątnego o danych dwóch bokach i kącie między nimi (7.4).	**C**	**D**

Zadanie 18. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	**B**	**C**

Zadanie 19. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**D**	**A**

Zadanie 20. (0−1)

		Wersja I	Wersja II
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów (8.6).	**A**	**C**

Zadanie 21. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego (G11.2). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).	**Wersja I** **A**	**Wersja II** **B**

Zadanie 22. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3).	**Wersja I** **B**	**Wersja II** **C**

Zadanie 23. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość stożka (G11.2).	**Wersja I** **D**	**Wersja II** **A**

Zadanie 24. (0−1)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	**Wersja I** **D**	**Wersja II** **B**

Zadanie 25. (0−1)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).	**Wersja I** **B**	**Wersja II** **C**

Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).

Przykładowe rozwiązanie
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.

Pierwszy etap rozwiązania polega na wyznaczeniu pierwiastków trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$.

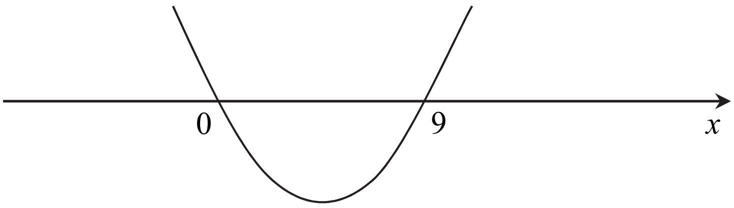
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $8x^2 - 72x$:

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując $x_1 = 0$, $x_2 = 9$ lub zaznaczając pierwiastki trójmianu na wykresie

albo

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu, a następnie stosujemy wzory na pierwiastki:
  $\Delta = 72^2$, $x_1 = \frac{72-72}{16} = 0$, $x_2 = \frac{72+72}{16} = 9$.

Drugi etap rozwiązania polega na wyznaczeniu zbioru rozwiązań nierówności $8x^2 - 72x \le 0$.
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $0 \le x \le 9$ lub $\langle 0,9 \rangle$ lub $x \in \langle 0,9 \rangle$ np. odczytując go ze szkicu wykresu funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$.



Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x) = 8x^2 - 72x$ i na tym zakończy lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np. popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $0 \le x \le 9$ lub $\langle 0,9 \rangle$ lub $x \in \langle 0,9 \rangle$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów

Uwagi

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez x, bez podania stosownych założeń, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji 1. etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający wyznacza ujemną deltę trójmianu kwadratowego, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Akceptujemy sytuację, gdy zdający poprawnie obliczy lub poda pierwiastki trójmianu $x_1 = 0$ i $x_2 = 9$ i zapisze, np. $x \in \langle -9,0 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \in \langle 9,0 \rangle$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje podstawowe własności potęg (1.5).

Przykładowe rozwiązanie

Wyłączamy wspólny czynnik przed nawias $4^{2017}\left(1+4+4^2+4^3\right)$. Doprowadzamy liczbę do postaci $4^{2017}\cdot 5\cdot 17$. Wnioskujemy, że dana liczba jest podzielna przez 17.

Schemat punktowania

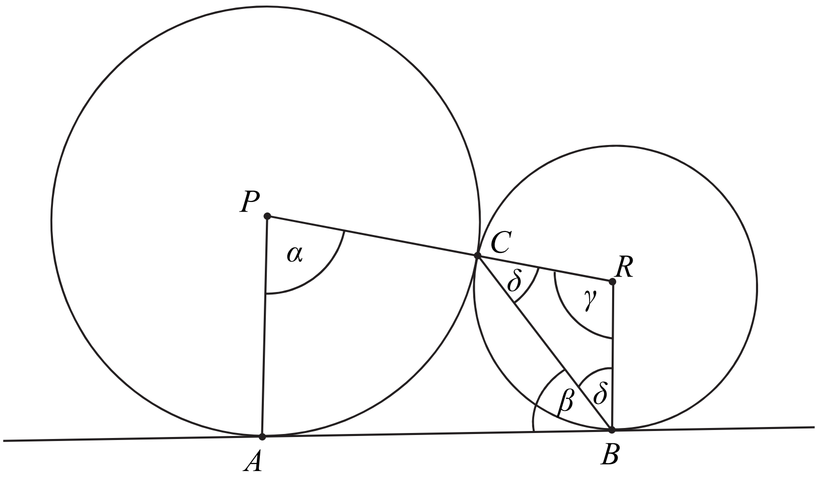
Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze liczbę $4^{2017}+4^{2018}+4^{2019}+4^{2020}$ w postaci iloczynu, w którym jeden z czynników jest potęgą 4^k, gdzie $1985\le k\le 2017$, np. $4^{2017}\left(1+4+4^2+4^3\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy przeprowadzi poprawny dowód.

Zadanie 28. (0–2)

V. Rozumowanie i argumentacja.	G10. Figury płaskie. Zdający korzysta z faktu, że styczna do okręgu jest prostopadła do promienia poprowadzonego do punktu styczności (G10.3). SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający stosuje twierdzenie o sumie katów trójkąta (SP9.3).

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Prosta *AB* jest styczna w punkcie *B* do okręgu o środku *R*, więc $|\sphericalangle ABR|=90^\circ$. Stąd

$$\delta=|\sphericalangle CBR|=90^\circ-\beta.$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90° - \beta .$$

Zatem

$$|\sphericalangle BRC| = \gamma = 180° - 2(90° - \beta) = 2\beta .$$

Suma miar kątów czworokąta $ABRP$ jest równa $360°$, $|\sphericalangle PAB| = 90°$, więc

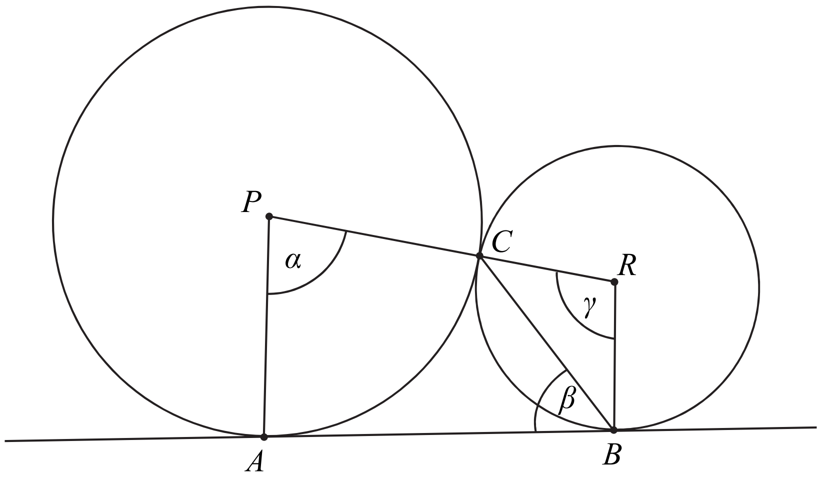
$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BRP| + |\sphericalangle RPA| = 360°,$$

czyli

$$90° + 90° + 2\beta + \alpha = 360°,$$
$$\alpha + 2\beta = 180°,$$
$$\alpha = 180° - 2\beta.$$

To kończy dowód.

II sposób



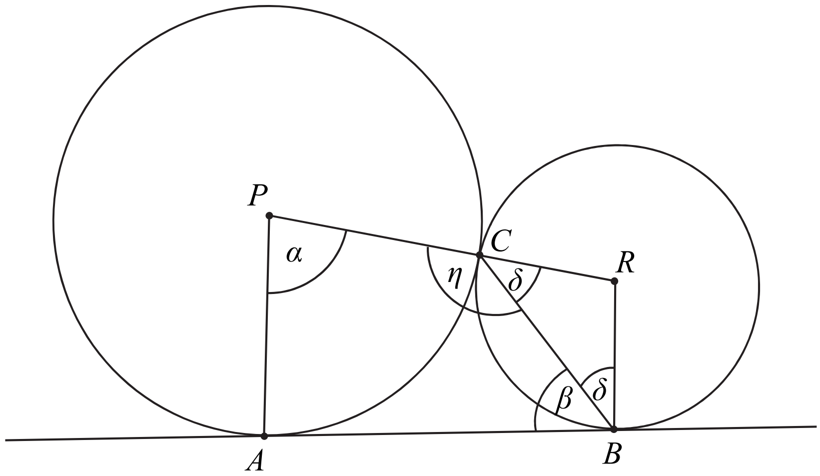
Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że $|\sphericalangle BRC| = \gamma = 2\beta$.

Ponieważ $|\sphericalangle ABR| = 90°$ i $|\sphericalangle PAB| = 90°$, więc czworokąt $ABRP$ jest trapezem o podstawach AP i BR. Suma miar kątów przy ramieniu trapezu jest równa $180°$, więc

$$\alpha + \gamma = 180°,$$
$$\alpha + 2\beta = 180°.$$

Stąd $\alpha = 180° - 2\beta$. To kończy dowód.

III sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$. Stąd

$$\delta = 90^\circ - \beta .$$

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90^\circ - \beta .$$

Kąty BCR i PCB są przyległe, więc

$$\eta = 180^\circ - |\sphericalangle BCR| = 180^\circ - (90^\circ - \beta) = 90^\circ + \beta .$$

Suma miar kątów czworokąta $ABCP$ jest równa 360°, $|\sphericalangle PAB| = 90^\circ$, więc

$$|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABR| + |\sphericalangle BCP| + |\sphericalangle CPA| = 360^\circ ,$$

czyli

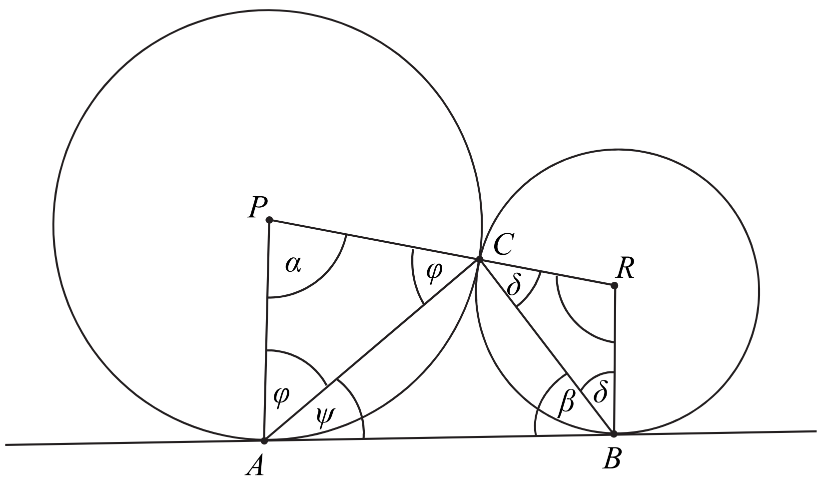
$$90^\circ + \beta + \eta + \alpha = 360^\circ ,$$

$$90^\circ + \beta + (90^\circ + \beta) + \alpha = 360^\circ ,$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\beta .$$

To kończy dowód.

IV sposób



Prosta AB jest styczna w punkcie B do okręgu o środku R, więc $|\sphericalangle ABR| = 90^\circ$.

Stąd $\delta = 90° - \beta$.

Trójkąt BRC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle BCR| = \delta = 90° - \beta .$$

Trójkąt PAC jest równoramienny, więc

$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle PCA| = \varphi = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2} .$$

Prosta AB jest styczna w punkcie A do okręgu o środku P, więc $|\sphericalangle PAB| = 90°$. Stąd

$$|\sphericalangle CAB| = \psi = 90° - \varphi = 90° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} .$$

Miara kąta ACB w trójkącie ABC jest równa

$$|\sphericalangle ACB| = 180° - \beta - \psi = 180° - \beta - \frac{\alpha}{2} .$$

Suma miar kątów PCA, ACB i BCR jest równa $180°$, więc

$$|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCR| = 180° ,$$

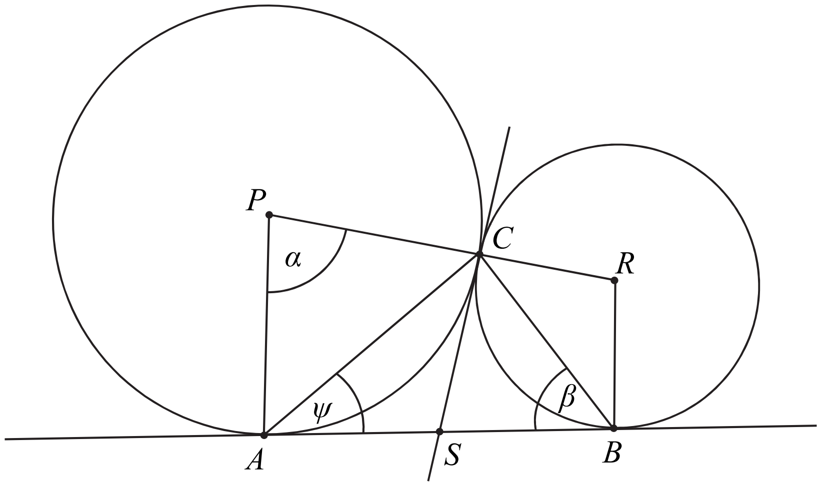
$$\varphi + \left(180° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + \delta = 180° ,$$

$$90° - \frac{\alpha}{2} + \left(180° - \beta - \frac{\alpha}{2}\right) + 90° - \beta = 180° ,$$

$$\alpha = 180° - 2\beta .$$

To kończy dowód.

<u>V sposób</u>



Poprowadźmy przez punkt C wspólną styczną do obu okręgów. Niech S oznacza punkt jej przecięcia z prostą AB.

Z twierdzenia o kącie między styczną a cięciwą wynika, że

$$\psi = \frac{\alpha}{2} .$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|AS| = |CS| = |BS|$. Stąd wynika, że S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Odcinek AB jest średnicą tego okręgu, więc trójkąt ABC jest prostokątny. Suma miar jego kątów ostrych jest równa $90°$, czyli

$$\beta + \psi = 90° .$$

$$\beta + \frac{\alpha}{2} = 90° ,$$

$$\alpha = 180° - 2\beta .$$

To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze układ warunków wystarczający do udowodnienia równości $\alpha = 180° - 2\beta$, np.:

- $\delta = 90° - \beta$ i $2\delta + \gamma = 180°$ i $\alpha + \gamma + 90° + 90° = 360°$

lub

- $\gamma = 2\beta$ i $\alpha + \gamma = 180°$,

lub

- $\delta = 90° - \beta$ i $\eta = 180° - \delta$ i $90° + \beta + \eta + \alpha = 360°$,

lub

- $\delta = 90° - \beta$ i $\varphi = 90° - \frac{\alpha}{2}$ i $\psi = 90° - \varphi$ i $180° - (\beta + \psi) = 180° - (\varphi + \delta)$,

lub

- $\beta + \psi = 90°$ i $\psi = \frac{\alpha}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji lub o jej wykresie (4.9).

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Ponieważ $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$, stąd wartość $p=\frac{-6+0}{2}=-3$.

Zatem $f(x)=a(x-p)^2+q$ dla $p=-3$ i $q=6$.

Obliczamy współczynnik *a*. Wiemy, że $f(0)=\frac{3}{2}$, zatem

$$a(0+3)^2+6=\frac{3}{2},$$

$$9a=-\frac{9}{2},$$

$$a=-\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: $a=-\frac{1}{2}$.

II sposób

Z treści zadania wynika, że $f(-6)=f(0)=\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} 36a-6b+c=\frac{3}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} b=6a \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka:

$$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{6a}{2a}=-3.$$

Stąd wynika, że $f(-3)=6$ i $f(x)=ax^2+6ax+\frac{3}{2}$. Obliczamy współczynnik *a*

$$a(-3)^2+6a\cdot(-3)+\frac{3}{2}=6,$$

$$-9a=\frac{9}{2},$$

$$a=-\frac{1}{2}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka: np. $p=\frac{-6+0}{2}=-3$

albo

- zapisze układ dwóch równań, np.: $\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2}, \end{cases}$

albo

- zapisze wzór funkcji f w postaci kanonicznej $f(x)=a(x-p)^2+q$ oraz zapisze $q=6$,

albo

- zapisze równanie $-\frac{\Delta}{4a}=6$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający

- zapisze wzór funkcji f w postaci: $f(x)=a(x+3)^2+6$

albo

- zapisze układ trzech równań z niewiadomymi a, b, c, np.:

$$\begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=6 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a(-6)^2+b(-6)+c=\frac{3}{2} \\ a\cdot 0-b\cdot 0+c=\frac{3}{2} \\ a(-3)^2+b(-3)+c=6 \end{cases}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający

- zapisze równanie z jedną niewiadomą a,

  np.: $a(0+3)^2+6=\frac{3}{2}$ lub $a(-3)^2+6a\cdot(-3)+\frac{3}{2}=6$, lub $36a^2+18a=0$

albo

- obliczy wartości b i c: $b=-3$, $c=\frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy wartość współczynnika a: $a=-\frac{1}{2}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa $4\frac{1}{2}$, to może otrzymać **4 punkty**, o ile w rozwiązaniu nie występują błędy.

2. Jeżeli zdający w przedstawionym rozwiązaniu traktuje liczby -6 i 0 jako miejsca zerowe rozważanej przez siebie funkcji i przyjmuje, że druga współrzędna wierzchołka paraboli jest równa 6, to może otrzymać **1 punkt**, o ile poprawnie wyznaczy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.

Zadanie 30. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	G10. Figury płaskie. Zdający stosuje twierdzenie Pitagorasa (G10.7). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4).

Przykładowe rozwiązanie

Oznaczmy długość krótszej przyprostokątnej przez *x*. Wtedy dłuższa przyprostokątna ma długość $x+14$. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$x^2+(x+14)^2=26^2,$$

$$x^2+x^2+28x+196=676,$$

$$x^2+14x-240=0$$

Stąd

$$x=10 \text{ lub } x=-24.$$

Drugie z rozwiązań odrzucamy, zatem długości boków trójkąta są równe: 10, 24, i 26, więc obwód jest równy 60 cm.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy:

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą, np.: $x^2+(x+14)^2=26^2$, gdzie x jest długością krótszej przyprostokątnej

albo

- zapisze układ równań, np.: $a^2+b^2=26^2$ i $b=a+14$, gdzie a jest długością krótszej oraz b długością dłuższej przyprostokątnej

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy obwód trójkąta: 60 cm.

Uwagi

1. Jeżeli zdający jedynie poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60, to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający poda długości boków trójkąta: 10, 24, 26 i jego obwód: 60 oraz uzasadni, że rozważany trójkąt jest prostokątny, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający podaje w rozwiązaniu tylko liczby 10, 24, 26, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 31. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).

Przykładowe rozwiązanie

Wyznaczamy różnicę r ciągu arytmetycznego.
W tym celu stosujemy wzory na sumę częściową $S_3 = 3a_1 + 3r = 33$ i $a_1 = 8$ lub zapisujemy równanie $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 33$.
Obliczamy r: $r = 3$.
Następnie obliczamy różnicę $a_{16} - a_{13}$, jako $3r$ lub po wyznaczeniu a_{16} i a_{13}, czyli
$a_{16} = 8 + 15 \cdot 3 = 53$, $a_{13} = 8 + 12 \cdot 3 = 44$.
Zatem $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy obliczy różnicę ciągu $r = 3$ (lub $3r = 9$) lub obliczy wartość $a_1 + r = 11$, lub obliczy wartość $a_2 = 11$, lub zapisze, że $a_{16} - a_{13} = 3r$, lub obliczy $a_3 = 14$
i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy różnicę $a_{16} - a_{13} = 9$.

Uwagi

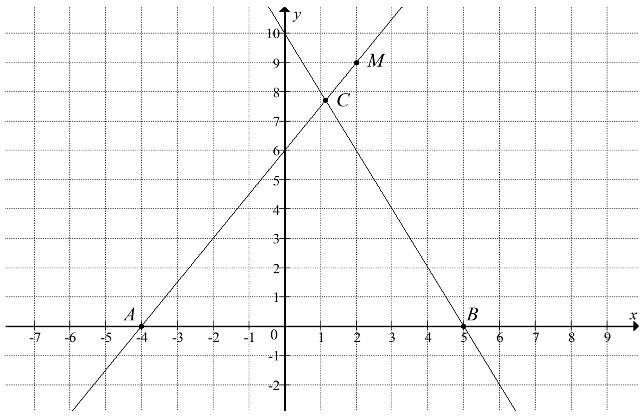
1. Jeśli zdający przyjmuje $n = 33$ lub $a_3 = 33$ i nie przedstawia poprawnej metody obliczenia różnicy $a_{16} - a_{13}$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający poda wartość $r = 3$ i zapisze $a_{16} - a_{13} = 3r = 9$, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający zamiast ciągu arytmetycznego rozważa ciąg geometryczny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zadanie 32. (0–5)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej) (8.1). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4).

Przykładowe rozwiązania

I sposób



Prosta AM przechodzi przez punkty $A=(-4,0)$ i $M=(2,9)$, więc jej równanie ma postać

$$y=\frac{9}{2+4}(x+4)\text{, czyli } y=\frac{3}{2}x+6\,.$$

Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Współrzędne punktu C obliczymy, rozwiązując układ równań:

$$y=\frac{3}{2}x+6 \text{ i } y=-2x+10\,.$$

Stąd

$$\frac{3}{2}x+6=-2x+10\,,$$

$$\frac{7}{2}x=4\,,$$

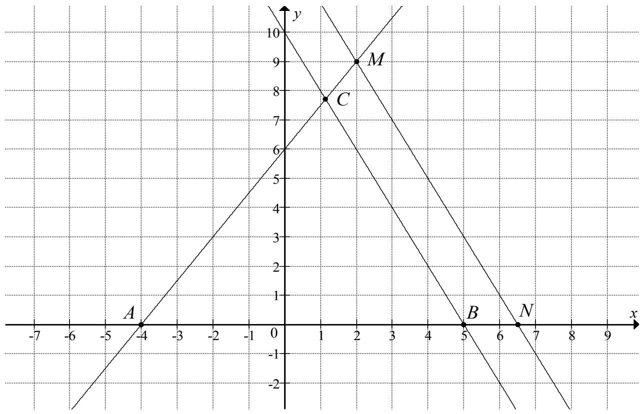
$$x=\frac{8}{7}\text{, a } y=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{7}+6=\frac{12}{7}+6=\frac{54}{7}$$

Zatem $C=\left(\frac{8}{7},\frac{54}{7}\right)$. Wynika stąd, że wysokość h trójkąta ABC opuszczona z wierzchołka C na podstawę AB jest równa $h=y_C=\frac{54}{7}$.

Zatem pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{54}{7}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}\,.$$

II sposób



Wyznaczamy równanie prostej l równoległej do prostej k i przechodzącej przez punkt $M=(2,9)$:

$$y=-2(x-2)+9,$$

$$y=-2x+13.$$

Niech N będzie punktem przecięcia prostej l z osią Ox , więc $N=\left(\frac{13}{2},0\right)$. Zatem

$$|AN|=\left|\tfrac{13}{2}-(-4)\right|=\tfrac{21}{2}.$$

Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Z równoległości prostych k i l wynika, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta ANM, a skala tego podobieństwa jest równa

$$s=\frac{|AB|}{|AN|}=\frac{9}{\frac{21}{2}}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}.$$

Pole trójkąta ANM jest równe

$$P_{ANM}=\frac{1}{2}|AN|\cdot 9=\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot 9=\frac{21\cdot 9}{4},$$

więc pole trójkąta ABC jest równe

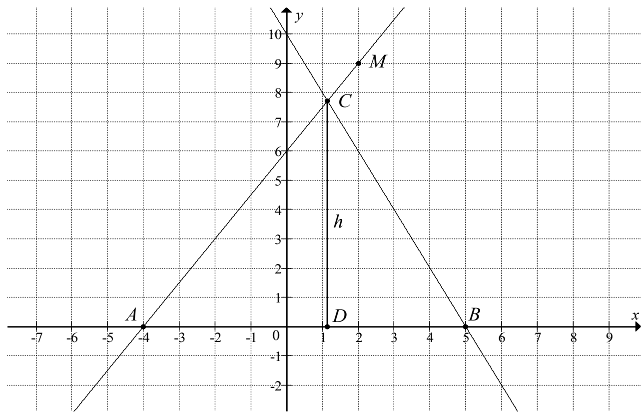
$$P_{ABC}=s^2\cdot P_{ANM}=\left(\frac{6}{7}\right)^2\cdot\frac{21\cdot 9}{4}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

Uwaga

Mając obliczone współrzędne wierzchołków trójkąta, możemy obliczyć jego pole, korzystając ze wzoru $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(x_B-x_A)(y_C-y_A)-(y_B-y_A)(x_C-x_A)\right|$:

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|(5+4)\left(\frac{54}{7}-0\right)-0\cdot\left(\frac{8}{7}+4\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|9\cdot\frac{54}{7}\right|=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

III sposób



Prosta k o równaniu $y=-2x+10$ przecina oś Ox w punkcie B, więc $B=(5,0)$.

Zatem $|AB|=|5-(-4)|=9$.

Niech $h=|CD|$. Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej k jest równy -2, więc

$$|DA|=\frac{1}{2}h.$$

Zatem $|AD|=9-\frac{1}{2}h$.

Współczynnik kierunkowy prostej AM jest równy $a_{AM}=\frac{9-0}{2-(-4)}=\frac{3}{2}$, ale $a_{AM}=\frac{|CD|}{|AD|}$, więc

$$\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{h}{9-\frac{1}{2}h}=\frac{3}{2},$$

$$2h=27-\frac{3}{2}h,$$

$$\frac{7}{2}h=27,$$

$$h=\frac{54}{7}.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{54}{7}=\frac{243}{7}=34\frac{5}{7}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający
- wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej AM: $a=\frac{3}{2}$

albo
- wyznaczy współrzędne punktu B: $B=(5,0)$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.
Zdający
- zapisze równanie prostej AM: $y=\frac{3}{2}x+6$

albo
- wyznaczy równanie prostej MN: $y=-2x+13$ i zapisze, że trójkąty ABC i ANM są podobne,

albo
- zapisze zależność między długościami odcinków CD i DA: $\frac{|CD|}{|AD|}=\frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający
- obliczy długość podstawy AB trójkąta: $|AB|=9$ oraz zapisze równanie, z którego można wyznaczyć jedną ze współrzędnych punktu C

albo
- obliczy współrzędne wierzchołka C: $C=\left(\frac{8}{7},\frac{54}{7}\right)$ (lub drugą współrzędną tego punktu) i nie zapisze współrzędnych punktu B,

albo
- obliczy skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM: $s=\frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta ANM do trójkąta ABC: $s_1=\frac{7}{6}$),

albo
- obliczy pole trójkąta ANM: $P_{ANM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{2}\cdot 9$ i zapisze, że $P_{ABC}=s^2\cdot P_{ANM}$, gdzie s oznacza skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM,

albo
- zapisze równanie z jedną niewiadomą, z którego można obliczyć wysokość trójkąta ABC, np.: $\frac{h}{9-\frac{1}{2}h}=\frac{3}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający

- obliczy drugą współrzędną wierzchołka C oraz długość podstawy AB trójkąta ABC: $y_C = \frac{54}{7}$, $|AB| = 9$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołków B i C: $B = (5,0)$, $C = \left(\frac{8}{7}, \frac{54}{7}\right)$,

albo

- obliczy skalę podobieństwa trójkąta ABC do trójkąta ANM: $s = \frac{6}{7}$ (lub skalę podobieństwa trójkąta ANM do trójkąta ABC : $s_1 = \frac{7}{6}$) oraz pole trójkąta ANM: $P_{ANM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{21}{2} \cdot 9$ i zapisze, że $P_{ABC} = s^2 \cdot P_{ANM}$,

albo

- obliczy wysokość CD trójkąta ABC: $h = \frac{54}{7}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Zdający obliczy pole trójkąta ABC: $P_{ABC} = \frac{243}{7}$.

Uwaga
Akceptujemy, jeżeli zdający poda pole trójkąta w przybliżeniu, np. 34,714.

Zadanie 33. (0–2)

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Przykładowe rozwiązanie

Jest to model klasyczny i liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 90$.

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych.

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne

$$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39\}.$$

Stąd $|A| = 10$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3, jest równe $\frac{1}{9}$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy

- zapisze, że $|\Omega| = 90$

albo

- zapisze, że $|A| = 10$ i nie wskazuje przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: $12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A i wynik zapisze w postaci ułamka:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10}{90} = \frac{1}{9}.$$

Uwaga

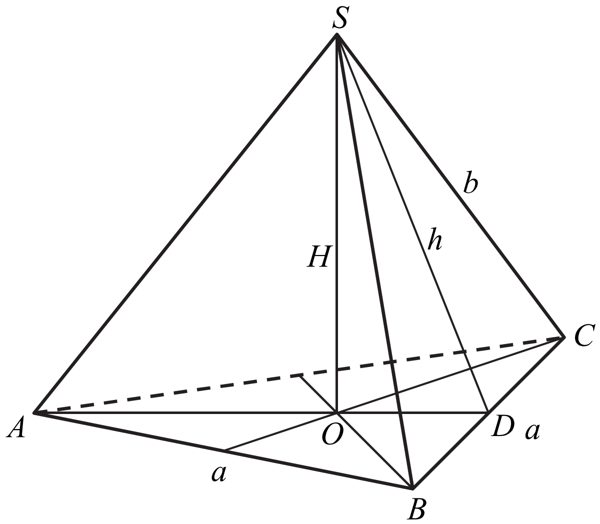
1. Jeżeli zdający błędnie zapisze wynik $P(A)$ jako liczbę większą od 1 lub mniejszą od 0, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli w przedstawionym rozwiązaniu zdający interpretuje zdarzenie elementarne jako rezultat wylosowania więcej niż jednej liczby, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniu zapisze tylko $\frac{1}{9}$, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 34. (0–4)

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi. (9.1) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami (9.2) Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między ścianami (9.4) Zdający stosuje trygonometrię do obliczeń długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6).

Przykładowe rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wykorzystujemy wzór na pole powierzchni bocznej ostrosłupa i zapisujemy równanie

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ skąd otrzymujemy } a = 2.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta DOS otrzymujemy

$$H^2 = h^2 - |DO|^2.$$

Ponieważ $|DO| = \frac{1}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, więc

$$H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Stąd $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$.

Zatem objętość ostrosłupa jest równa

$$V = \frac{1}{3}P_p\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{209}}{12}.$$

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający

- zapisze równanie $\frac{15\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{5\sqrt{3}}{4}$

albo

- zapisze, że $|DO| = \frac{1}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $|AO| = \frac{2}{3} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny .... 2 p.

Zdający

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze równanie z niewiadomą H, np.: $H^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

albo

- obliczy długość krawędzi a podstawy ostrosłupa: $a = 2$ i zapisze układ równań wystarczający do obliczenia wysokości ostrosłupa, np.: $\begin{cases} H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 \\ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2 = b^2 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa: $H = \frac{\sqrt{209}}{4\sqrt{3}}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający obliczy objętość V ostrosłupa: $V = \frac{\sqrt{209}}{12}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający rozważa inną bryłę niż podana w treści zadania, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.
3. Jeżeli zdający poda długość krawędzi podstawy $a = 2$ bez obliczeń i rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający błędnie przepisze liczbę $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ lub liczbę $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ i z tym błędem rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
5. Jeśli zdający nie obliczy a i przyjmuje, że ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to otrzymuje **0 punktów**.