CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom podstawowy**
Formy arkusza:	MMA-P1_1P-202 (wersje arkusza: X i Y), MMA-P1_2P-202, MMA-P1_3P-202, MMA-P1_6P-202, MMA-P1_7P-202, MMA-P1_QP-202
Termin egzaminu:	Termin główny – czerwiec 2020 r.
Data publikacji dokumentu:	3 sierpnia 2020 r.

Warszawa 2020

Zadanie 1. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a \pm b)^2$ oraz $a^2 - b^2$ (2.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		B	**C**

Zadanie 2. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		C	**A**

Zadanie 3. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		D	**B**

Zadanie 4. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykonuje obliczenia procentowe, oblicza podatki, zysk z lokat (1.9).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		A	**D**

Zadanie 5. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności pierwszego stopnia z jedną niewiadomą (3.3).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		A	**D**

Zadanie 6. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).	**B**	**C**

Zadanie 7. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, w postaci ogólnej i w postaci iloczynowej (o ile istnieją) (4.10).	**D**	**B**

Zadanie 8. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym (4.11).	**C**	**B**

Zadanie 9. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, fizycznych itp. (także osadzonych w kontekście praktycznym) (4.12).	**B**	**C**

Zadanie 10. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający sprawdza, czy dana liczba rzeczywista jest rozwiązaniem równania lub nierówności (3.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		B	**B**

Zadanie 11. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		D	**A**

Zadanie 12. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu. Posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		B	**C**

Zadanie 13. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych (8.2).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		C	**D**

Zadanie 14. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym (5.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		D	**C**

Zadanie 15. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i na sumę *n*-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		C	**B**

Zadanie 16. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	4. Funkcje. Zdający wyznacza wzór funkcji liniowej na podstawie informacji o funkcji lub o jej wykresie (4.6).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		D	**A**

Zadanie 17. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający stosuje zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym (7.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		D	**A**

Zadanie 18. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej) (8.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		A	**A**

Zadanie 19. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od 0° do 180° (6.1).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		B	**A**

Zadanie 20. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający oblicza odległość dwóch punktów (8.6).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		A	**D**

Zadanie 21. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		C	**B**

Zadanie 22. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
IV. Użycie i tworzenie strategii.	G10. Figury płaskie. Zdający oblicza pola i obwody trójkątów i czworokątów (G10.9).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		C	**B**

Zadanie 23. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G9. Statystyka opisowa i wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa. Zdający wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (G9.4).	**Wersja X**	**Wersja Y**
		A	**D**

Zadanie 24. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym) (G11.2).	**A**	**D**

Zadanie 25. (0–1)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe	Poprawna odpowiedź	
		Wersja X	**Wersja Y**
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	G11. Bryły. Zdający oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka, kuli (także w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym) (G11.2).	**B**	**C**

Zadania otwarte

Uwaga: Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

Zadanie 26. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (3.5).

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym zakończy lub zapisze błędny zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji *f* określonej wzorem $f(x)=2x^2+3x-5$: $x_1=-\frac{5}{2}$ i $x_2=1$.
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$

albo

- realizując pierwszy etap rozwiązania zadania popełnia błędy (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - popełnia błędy rachunkowe przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète’a, np.: $x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności,

albo

- wyznaczy odcięte punktów wspólnych wykresów funkcji określonych wzorami $y=2(x-1)(x+3)$ oraz $y=x-1$: $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$ i na tym zakończy lub zapisze błędny zbiór rozwiązań nierówności.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy:

- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ lub $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ lub ($x<-\frac{5}{2}$ lub $x>1$),

albo

- sporządzi ilustrację graficzną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x < -\frac{5}{2}$, $x > 1$,

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki (dysleksja)

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 1) \cup \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$, $\left(+\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (1, -\infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Uwagi

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $x < -\frac{5}{2}$ i $x > 1$, $x < -\frac{5}{2}$ oraz $x > 1$.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-1$, rozważając dwa przypadki $x-1 > 0$ oraz $x-1 < 0$, rozwiąże nierówność w każdym z tych przypadków i poda zbiór rozwiązań każdej z tych nierówności, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = 1$ i zapisze, np. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże nierówność $2(x-1)(x+3) > x-1$, ale zapisze sprzeczną z tym rozwiązaniem odpowiedź, np. $x \notin R \setminus \left\{-\frac{5}{2}, 1\right\}$, albo $x \neq -\frac{5}{2}$ i $x \neq 1$, to otrzymuje **2 punkty.**
5. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie sposobem III i nie sprawdzi algebraicznie, że odczytane liczby $x_1 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_2 = 1$ są odciętymi punktów wspólnych wykresów funkcji $y = 2(x-1)(x+3)$ oraz $y = x-1$, to otrzymuje **2 punkty**.
6. Jeżeli zdający pominie 2 w nierówności $2(x-1)(x+3) > x-1$ i rozwiąże nierówność $(x-1)(x+3) > x-1$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
7. Jeżeli zdający rozwiązuje zadanie sposobem III i błędnie odczyta którąkolwiek z odciętych punktów wspólnych wykresów funkcji $y = 2(x-1)(x+3)$ oraz $y = x-1$, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie, pod warunkiem, że otrzyma sumę dwóch rozłącznych przedziałów otwartych.
8. Jeżeli zdający podaje pierwiastki bez związku z trójmianem kwadratowym z zadania, to oznacza, że nie podjął realizacji pierwszego etapu rozwiązania i w konsekwencji otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

9. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy obliczony wyróżnik Δ jest niedodatni, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
10. Jeżeli zdający rozwiąże nierówność $2(x-1)(x+3)>0$, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
11. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez $x-1$ bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie**.**

Przykładowe rozwiązanie

Pierwszy etap to wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego: $2x^2+3x-5$.

Drugi etap to zapisanie zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej.

Pierwszy etap rozwiązania może być realizowany następująco:

<u>I sposób</u>
Przekształcamy równoważnie nierówność do postaci $(2x+5)(x-1)>0$ (przenosimy wszystkie wyrażenia na lewą stronę nierówności i wyłączamy wspólny czynnik poza nawias), a następnie zapisujemy pierwiastki trójmianu $(2x+5)(x-1)$: $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$.

<u>II sposób</u>
Zapisujemy nierówność w postaci $2x^2+3x-5>0$ i obliczamy pierwiastki trójmianu $2x^2+3x-5$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta=49$ i stąd $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$ oraz $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, stąd $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$

albo

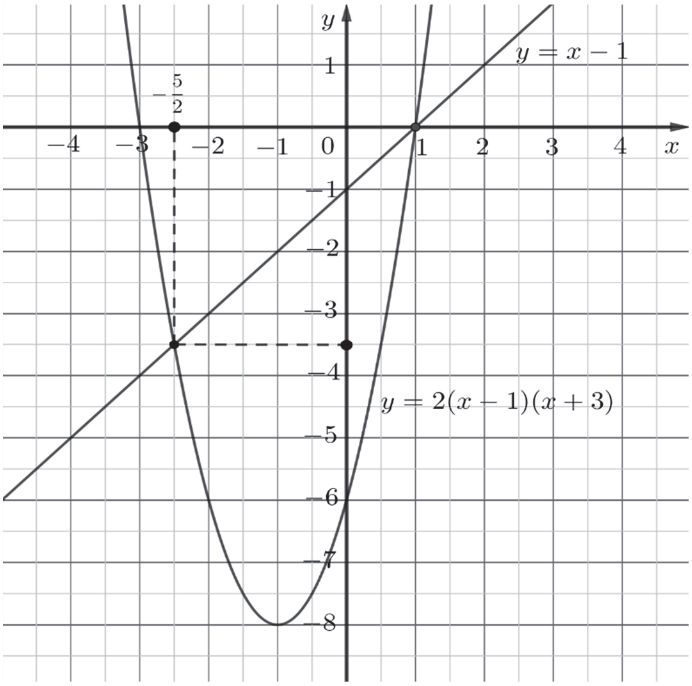
- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając je na wykresie (wystarczy szkic wykresu, oś liczbowa itp.):
  $x_1=-\frac{5}{2}$ oraz $x_2=1$ lub $2\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-1)$.

Drugi etap rozwiązania:

Zapisujemy zbiór rozwiązań nierówności: $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,+\infty)$ lub $x\in\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

<u>III sposób</u>

Wykonujemy rysunek pomocniczy. W jednym układzie współrzędnych szkicujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej określonej wzorem $y=2(x-1)(x+3)$ oraz fragment wykresu funkcji liniowej określonej wzorem $y=x-1$.



Odczytujemy odcięte punktów wspólnych obu wykresów. Są to liczby $x_1 = -\frac{5}{2}$ oraz $x_2 = 1$.

Sprawdzamy, czy odczytane współrzędne są odciętymi punktów wspólnych tych wykresów

$$2\left(-\frac{5}{2}-1\right)\left(-\frac{5}{2}+3\right) = 2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$$

$$-\frac{5}{2}-1 = -\frac{7}{2}$$

Stąd liczba $\left(-\frac{5}{2}\right)$ jest odciętą punktu wspólnego obu wykresów, a liczba 1 jest wspólnym miejscem zerowym obu funkcji $y = 2(x-1)(x+3)$ oraz $y = x-1$.

Z naszkicowanego wykresu odczytujemy te argumenty, dla których funkcja kwadratowa przyjmuje wartości większe niż funkcja liniowa $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (1, +\infty)$. Zatem zbiór ten jest zbiorem rozwiązań nierówności $2(x-1)(x+3) > x-1$.

Zadanie 27. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	3. Równania i nierówności. Zdający korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7).

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy
- zapisze dwa równania $x^2-1=0$ i $x^2-2x=0$ lub z zapisu wynika, że rozwiązuje te równania

albo
- obliczy lub poda rozwiązania jednego z równań:
  $x^2-1=0$ ($x=1$, $x=-1$) lub $x^2-2x=0$ ($x=0$, $x=2$)

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $x=0$, $x=2$, $x=1$, $x=-1$, ale nie uzyska ich w wyniku błędnej metody.

Uwagi
1. Jeżeli zdający poda wszystkie rozwiązania równania, bez zapisanych rachunków lub uzasadnienia, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający poprawnie zapisze lewą stronę równania w postaci sumy jednomianów i doprowadzając ją do postaci iloczynu popełni błędy, ale skorzysta z własności iloczynu równego zero, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązanie

Iloczyn jest równy zero, jeśli przynajmniej jeden z czynników jest równy zero.
Zatem $x^2-1=0$ lub $x^2-2x=0$.
Równanie $x^2-1=0$ ma dwa rozwiązania: $x=-1$ lub $x=1$.
Równanie $x^2-2x=0$ ma dwa rozwiązania: $x=0$ lub $x=2$.

Zatem rozwiązaniami równania $\left(x^2-1\right)\left(x^2-2x\right)=0$ są liczby: $x=0$, $x=2$, $x=1$, $x=-1$.

Zadanie 28. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający używa wzorów skróconego mnożenia $(a\pm b)^2$ oraz a^2-b^2 (2.1).

Zasady oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....**1 p.**
gdy
- zapisze nierówność w postaci $(a-b)^2+b^2>0$

albo
- obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego w zależności od zmiennej *a* lub *b*, występującego po jednej stronie nierówności, gdy po drugiej stronie jest 0, i stwierdzi, że jest on niedodatni

albo

- obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego w zależności od zmiennej *a* lub *b*, występującego po jednej stronie nierówności, gdy po drugiej stronie jest 0 oraz rozważy jeden z przypadków $\Delta < 0$ lub $\Delta = 0$ i w tym przypadku doprowadzi rozumowanie do końca

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy poda pełne uzasadnienie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy rozważy dwa przypadki:

w jednym, dla $a \neq 0$, podzieli stronami nierówność przez a^2, w drugim, dla $b \neq 0$, podzieli stronami nierówność przez b^2

i w jednym przypadku doprowadzi rozumowanie do końca.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy

- rozważy trzy przypadki i zapisze nierówności $\left(a-\sqrt{2}b\right)^2 > 2ab\left(1-\sqrt{2}\right)$, $\left(a+\sqrt{2}b\right)^2 > 2ab\left(1+\sqrt{2}\right)$, $a^2+2b^2>0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

albo

- przeprowadzi pełne rozumowanie w dwóch spośród trzech przypadków

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy przeprowadzając dowód nie wprost, zapisze nierówność $a\left(a-2b\right)+2b^2\le 0$ w postaci $\left(a-b\right)^2+b^2\le 0$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Zasady oceniania VI sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.
gdy zapisze nierówność w postaci równoważnej $a^2+2b^2>2ab$ oraz zapisze, że dla dowolnych liczb rzeczywistych *a*, *b* prawdziwe są nierówności:

$$a^2+2b^2\ge a^2+b^2 \text{ oraz } a^2+b^2\ge 2ab$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 p.
gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga
Jeżeli zdający sprawdza prawdziwość nierówności jedynie dla wybranych wartości *a* i *b*, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>
Przekształcamy równoważnie nierówność i otrzymujemy kolejno:

$$a^2-2ab+2b^2>0\,,$$

$$a^2-2ab+b^2+b^2>0\,,$$

$$\left(a-b\right)^2+b^2>0\,.$$

Nierówność $(a-b)^2+b^2>0$ jest prawdziwa, ponieważ:

1) wyrażenie $(a-b)^2$ jest dodatnie, gdyż z założenia wynika $a-b\neq 0$ i kwadrat każdej liczby rzeczywistej różnej od zera jest dodatni,

2) wyrażenie b^2 jest nieujemne,

3) suma dwóch liczb rzeczywistych, z których jedna jest liczbą dodatnią, a druga liczbą nieujemną, jest liczbą dodatnią.

To kończy dowód.

<u>II sposób</u>
Przekształcamy równoważnie nierówność i otrzymujemy:

$$a^2-2ab+2b^2>0\,.$$

Wyrażenie $a^2-2ab+2b^2$ traktujemy jako trójmian kwadratowy jednej zmiennej np. *a*.

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2-2ab+2b^2$ jest równy: $\Delta=4b^2-8b^2=-4b^2$.
Ten wyróżnik jest niedodatni dla każdej rzeczywistej wartości *b*.
Gdy $\Delta<0$, to $a^2-2ab+2b^2>0$ dla każdej rzeczywistej wartości *a*.
Gdy $\Delta=0$, to $b=0$, stąd $a^2>0$, ponieważ z założenia $a\neq b$.

Oznacza to, że dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych *a* i *b* prawdziwa jest nierówność $a^2-2ab+2b^2>0$.

To kończy dowód.

<u>III sposób</u>

Przekształcamy równoważnie nierówność $a(a-2b)+2b^2>0$ i otrzymujemy:

$$a^2-2ab+2b^2>0\,.$$

Z założenia wynika, że liczby a i b nie mogą jednocześnie przyjmować wartości 0.

Jeżeli $b\neq 0$, to $b^2>0$. Dzielimy obie strony nierówności przez b^2 i otrzymujemy nierówność równoważną

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\frac{a}{b}+2>0\,.$$

Niech $x=\frac{a}{b}$. Otrzymujemy nierówność kwadratową $x^2-2x+2>0$ z niewiadomą x. Zauważamy, że ta nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, bo z równości

$$x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

wnioskujemy, że $(x-1)^2+1>0$, wobec oczywistej nierówności $(x-1)^2\geq 0$.

Natomiast jeżeli $a \neq 0$, to $a^2 > 0$. Dzielimy obie strony nierówności przez a^2 i otrzymujemy nierówność równoważną

$$2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{b}{a} + 1 > 0 .$$

Niech teraz $x = \frac{b}{a}$. Otrzymujemy nierówność kwadratową $2x^2 - 2x + 1 > 0$ z niewiadomą x.

Ponieważ wyróżnik trójmianu $2x^2 - 2x + 1$ jest ujemny oraz współczynnik przy najwyższej potędze trójmianu jest dodatni, więc ten trójmian przyjmuje tylko wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej x.

Z rozważonych przypadków wynika, że nierówność jest prawdziwa dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b.

To kończy dowód.

IV sposób

Niech $a \neq b$. Rozważmy następujące przypadki:

Przypadek I: $a \cdot b > 0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $a(a-2b) + 2b^2 > 0$ i otrzymujemy:

$$a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab > 2ab - 2\sqrt{2}ab .$$

Stąd $\left(a - \sqrt{2}b\right)^2 > 2ab\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

Wyrażenie $\left(a - \sqrt{2}b\right)^2$ jest nieujemne. Wyrażenie $2ab\left(1 - \sqrt{2}\right)$ jest ujemne, ponieważ $1 - \sqrt{2} < 0$ i z założenia $ab > 0$.

Nierówność jest prawdziwa dla każdych dwóch liczb rzeczywistych a i b, takich, że $a \cdot b > 0$ i $a \neq b$.

Przypadek II: $a \cdot b < 0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $a(a-2b) + 2b^2 > 0$ i otrzymujemy:

$$a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab > 2ab + 2\sqrt{2}ab .$$

Stąd $\left(a + \sqrt{2}b\right)^2 > 2ab\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

Wyrażenie $\left(a + \sqrt{2}b\right)^2$ jest nieujemne. Wyrażenie $2ab\left(1 + \sqrt{2}\right)$ jest ujemne, ponieważ $1 + \sqrt{2} > 0$ i z założenia $ab < 0$.

Nierówność jest prawdziwa dla każdych dwóch liczb rzeczywistych a i b, takich, że $a \cdot b < 0$ i $a \neq b$.

Przypadek III: $a \cdot b = 0$

Przekształcamy równoważnie nierówność $a(a-2b)+2b^2>0$ i otrzymujemy:

$$a^2-2ab+2b^2>0 .$$

Ponieważ $a \cdot b = 0$, więc nierówność $a^2-2ab+2b^2>0$ możemy zapisać w postaci $a^2+2b^2>0$.

Suma kwadratów dwóch dowolnych liczb rzeczywistych *a* i *b*, takich, że $a \neq b$ jest dodatnia.

Nierówność jest prawdziwa dla każdych dwóch liczb rzeczywistych *a* i *b*, takich, że $a \cdot b = 0$ i $a \neq b$.

To kończy dowód.

<u>**V sposób**</u> (*dowód nie wprost*)

Załóżmy, że istnieją różne liczby rzeczywiste *a* i *b*, dla których prawdziwa jest nierówność

$$a(a-2b)+2b^2 \le 0 .$$

Powyższa nierówność jest równoważna nierównościom:

$$a^2-2ab+2b^2 \le 0 ,$$

$$(a-b)^2+b^2 \le 0 .$$

Ponieważ lewa strona tej nierówności jest sumą dwóch liczb nieujemnych $(a-b)^2$ i b^2, więc może zachodzić jedynie przypadek $(a-b)^2+b^2=0$. Wynika stąd, że $a-b=0$ i $b=0$. Zatem $a=0$ i $b=0$, co przeczy założeniu, że liczby *a* i *b* są różne.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że nierówność $a(a-2b)+2b^2 \le 0$ jest fałszywa.

Prawdziwa zatem jest nierówność $a(a-2b)+2b^2>0$, dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych *a* i *b*.

To kończy dowód.

<u>**VI sposób**</u> (*szacowanie*)

Nierówność $a(a-2b)+2b^2>0$ jest równoważna nierówności $a^2+2b^2>2ab$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych *a*, *b* prawdziwe są nierówności $a^2+2b^2 \ge a^2+b^2$ oraz $a^2+b^2 \ge 2ab$, przy czym $a^2+b^2=2ab$ tylko wtedy, gdy $a=b$. Ale z założenia $a \neq b$, więc otrzymujemy $a^2+2b^2 \ge a^2+b^2>2ab$.

To kończy dowód.

Zadanie 29. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający rozpoznaje trójkąty podobne i wykorzystuje (także w kontekstach praktycznych) cechy podobieństwa trójkątów (7.1). SP9. Wielokąty, koła, okręgi. Zdający rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, równoboczne i równoramienne (SP9.1).

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy

- wyznaczy długości odcinków *BC* i *CF* w zależności od tej samej zmiennej, np.: $|BC| = a$ i $|CF| = \frac{3\sqrt{3}a}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ lub $|BC| = 2x$ i $|CF| = \frac{9}{8}x$

albo

- wyznaczy skalę podobieństwa trójkątów *BCD* i *CEF*: $k = \frac{8\sqrt{3}}{9}$

albo

- wyznaczy długość odcinka *CF* w zależności od długości odcinków *CB* i *CD* oraz zależność między długościami odcinków *CD* i *CB*, np.: $|CF| = \frac{3|CD|^2}{4|CB|}$, $|CD| = \frac{\sqrt{3}}{2}|CB|$

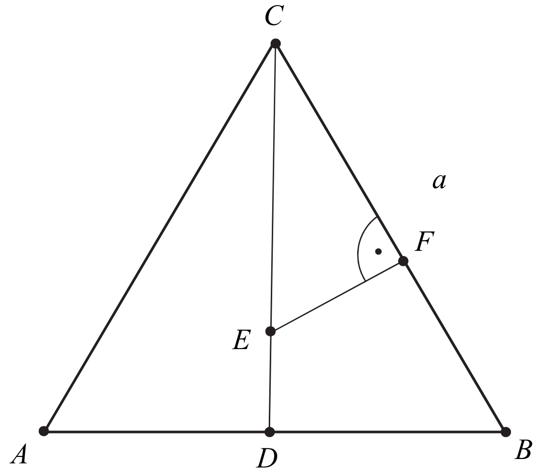
i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy zapisze pełne rozumowanie.

Uwaga
Ponieważ podobieństwo zachowuje stosunek długości odcinków, więc jeżeli zdający przyjmuje konkretną wartość długości boku trójkąta i przeprowadzi rozumowanie do końca, ale nie odwołuje się do tej własności, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

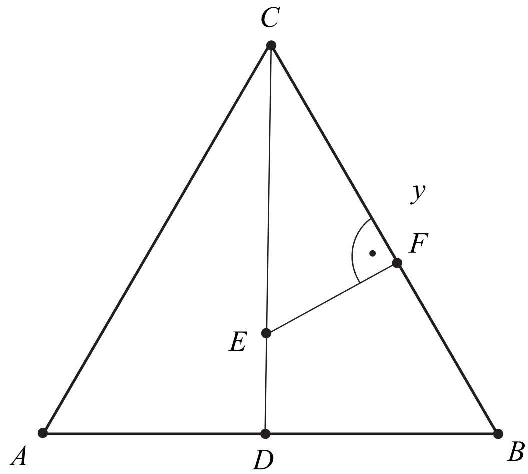


Niech $|BC| = a$. Wtedy $|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ponieważ $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, to $|CE| = \frac{3\sqrt{3}a}{8}$.

Zatem $|CF| = |CE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16}a = \frac{9}{16}|BC|$.

To kończy dowód.

II sposób

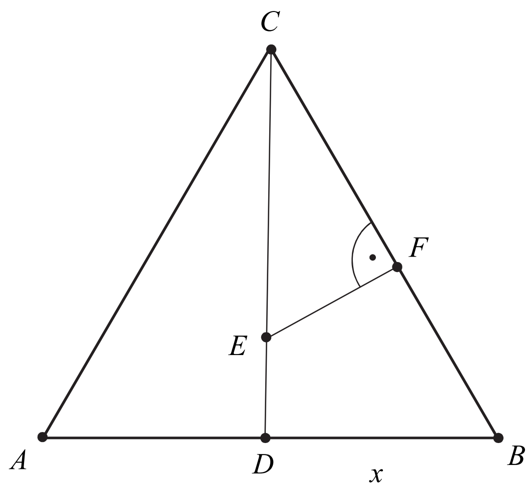


Trójkąt *BCD* jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych $30°$ i $60°$. Niech $|BC| = y$.

Wtedy $|CD| = \frac{y\sqrt{3}}{2}$. Trójkąt *CEF* jest połową trójkąta równobocznego. Niech $|CF| = x$. Stąd $|CE| = \frac{2x\sqrt{3}}{3}$. Ponieważ $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, to $\frac{2x\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{y\sqrt{3}}{2}$. Stąd $x = \frac{9}{16}y$.

To kończy dowód.

III sposób



Niech $x = |BD|$. Trójkąt *BCD* jest trójkątem prostokątnym o kątach ostrych 30° i 60°, więc

$$|BC| = 2x \text{ oraz } |CD| = x\sqrt{3}.$$

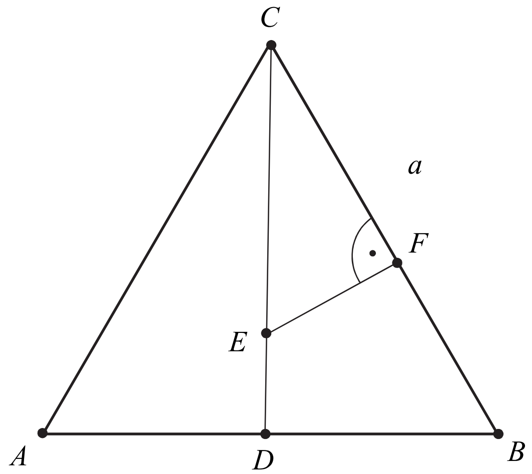
Ponieważ $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$, więc $|CE| = \frac{3}{4}x\sqrt{3}$. Trójkąt *CEF* jest połową trójkąta równobocznego,

więc $|CF| = \dfrac{\frac{3}{4}x\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{8}x$.

Stąd $\dfrac{|CF|}{|CB|} = \dfrac{\frac{9}{8}x}{2x} = \dfrac{9}{16}$. Zatem $|CF| = \dfrac{9}{16}|CB|$.

To kończy dowód.

IV sposób



Trójkąty *BCD* i *ECF* są podobne na podstawie cechy (*kąt, kąt, kąt*). Przyjmijmy następujące oznaczenie: $|BC| = a$, wtedy $|CD| = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Skalę podobieństwa można obliczyć w następujący sposób:

$$k = \frac{|BC|}{|CE|} = \frac{a}{\frac{3}{4}h} = \frac{a}{\frac{3}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \text{ oraz } k = \frac{|CD|}{|CF|}.$$

Stąd $|CF| = \frac{|CD|}{k} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{9}{16}a$.

To kończy dowód.

Zadanie 30. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3).

Zasady oceniania

Zdający otrzymuje ....1 p.
gdy

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych $|\Omega| = 6^2 = 36$ lub opisze zbiór zdarzeń elementarnych za pomocą tabeli

albo

- wypisze wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*:
  $A = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(5,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(6,5)\}$
  lub zaznaczy je wszystkie w tabeli lub zaznaczy wszystkie istotne gałęzie na pełnym drzewie składającym się z 36 gałęzi,

albo

- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A, np.: $|A| = 2\cdot 6 - 1 = 11$, $|A| = 5+5+1 = 11$ i nie wskaże przy tym niepoprawnych zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*,

albo

- zapisze prawdopodobieństwa potrzebne do wyznaczenia końcowego wyniku na dwóch etapach (przy stosowaniu metody drzewa probabilistycznego składającego się z czterech gałęzi) oraz wskaże wszystkie istotne gałęzie (dla zdarzenia *A* lub zdarzenia A')

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający zapisze tylko: $|A|=11$, $|\Omega|=36$, $P(A)=\frac{11}{36}$, lub zapisze tylko: $P(A)=\frac{11}{36}$, lub $\frac{11}{36}$, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający zapisze prawdopodobieństwo $P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze tylko $|A|=11$, to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd przy wypisywaniu zdarzeń elementarnych i wypisze o jedno za mało lub jedno powtórzy, ale nie wypisze żadnego niewłaściwego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający stosuje drzewo probabilistyczne o 36 gałęziach, w którym przynajmniej 7 gałęzi odpowiada sytuacjom sprzyjającym rozważanemu zdarzeniu *A* (lub przynajmniej 13, gdy rozpatruje zdarzenie A'), ale nie wskaże gałęzi niewłaściwej, i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy prawdopodobieństwo, to otrzymuje **1 punkt**.
6. Jeżeli zdający narysuje tylko drzewko i nie zaznaczy oraz nie opisze żadnej gałęzi, to otrzymuje **0 punków**.
7. Jeżeli zdający zapisze tylko liczby 36 lub 11 lub 25 i z rozwiązania zadania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów.**
8. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$ lub $P(A)<0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.

Przykładowe rozwiązania

I sposób

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $|\Omega|=6^2=36$ lub opisujemy zbiór zdarzeń elementarnych np. w postaci tabeli

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	**(1,5)**	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	**(3,5)**	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	**(4,5)**	(4,6)
5	**(5,1)**	**(5,2)**	**(5,3)**	**(5,4)**	**(5,5)**	**(5,6)**
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	**(6,5)**	(6,6)

Wskazujemy elementy zbioru *A* i zliczamy je:

$$|A|=11.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*. Ponieważ wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, więc korzystamy z klasycznej definicji prawdopodobieństwa:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{11}{36}.$$

<u>II sposób</u>

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 6^2 = 36$.

A – zdarzenie polegające na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.
A' – zdarzenie polegające na tym, że ani razu nie wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

Wskazujemy elementy zbioru A' (wypisujemy lub zaznaczamy w tabeli) i zliczamy je:

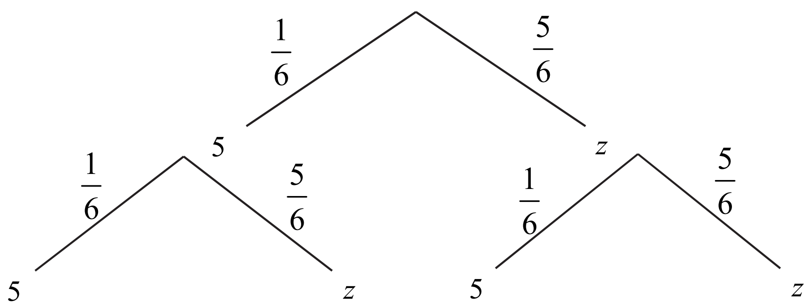
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**(1,1)**	**(1,2)**	**(1,3)**	**(1,4)**	(1,5)	**(1,6)**
2	**(2,1)**	**(2,2)**	**(2,3)**	**(2,4)**	(2,5)	**(2,6)**
3	**(3,1)**	**(3,2)**	**(3,3)**	**(3,4)**	(3,5)	**(3,6)**
4	**(4,1)**	**(4,2)**	**(4,3)**	**(4,4)**	(4,5)	**(4,6)**
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	**(6,1)**	**(6,2)**	**(6,3)**	**(6,4)**	(6,5)	**(6,6)**

$$|A'| = 5^2 = 25.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$.

<u>III sposób</u> (*metoda drzewka*)

Przedstawiamy model graficzny doświadczenia.
5 – oznacza wypadnięcie ścianki kostki z pięcioma oczkami, *z* – oznacza wypadnięcie innej ścianki niż z pięcioma oczkami.



Prawdopodobieństwo zdarzenia *A* jest równe: $P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.

Zadanie 31. (0–2)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	6. Trygonometria. Zdający stosuje proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, oraz $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ (6.4).

Zasady oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 p.

gdy przekształci równanie $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ do postaci:

$2\text{tg}\alpha+3=4$ lub $2\sin\alpha=\cos\alpha$ lub $2\sin\alpha-\cos\alpha=0$ lub $2\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ lub $2a=b$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy tangens kąta α : $\text{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, ale nie uzyska go w wyniku błędnej metody.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd i zapisze $\text{tg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający popełni jedyny błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru $\sqrt{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ albo $(a+b)^2=a^2+b^2$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **1 punkt**.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Równanie $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4.$$

Stąd $2\text{tg}\alpha+3=4$, czyli $\text{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

<u>II sposób</u>

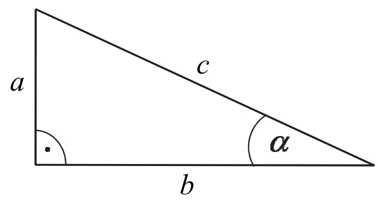
Równanie $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$2\sin\alpha+3\cos\alpha=4\cos\alpha.$$

Stąd $2\sin\alpha=\cos\alpha$, czyli $\text{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

<u>III sposób</u>

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych *a* i *b*, długość przeciwprostokątnej *c* oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha=\frac{b}{c}$.



Podane równanie $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ zapisujemy w postaci $\frac{2\cdot\frac{a}{c}+3\cdot\frac{b}{c}}{\frac{b}{c}}=4$. Następnie wykonujemy przekształcenia na lewej stronie tej równości i otrzymujemy $\frac{2a+3b}{b}=4$. Stąd wynika, że $2a+3b=4b$, czyli $2a=b$. Ostatnia równość oznacza, że $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$. Zatem $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

<u>IV sposób</u>

Równanie $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$ przekształcamy równoważnie do postaci

$$2\sin\alpha+3\cos\alpha=4\cos\alpha .$$

Stąd wynika, że $2\sin\alpha=\cos\alpha$. Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i otrzymujemy równanie $\sin^2\alpha+(2\sin\alpha)^2=1$. Stąd $\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$. Ponieważ α jest kątem ostrym, więc $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ale $\cos\alpha=2\sin\alpha$, więc $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Ostatecznie $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{1}{2}$.

Zadanie 32. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt (8.3). Zdający oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych (8.4). Zdający wyznacza współrzędne środka odcinka (8.5).

Zasady oceniania I, II, III i IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zdający

- wyznaczy równanie prostej *AC*: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12}$

albo

- obliczy odległość punktu *A* od prostej *BD*: 5

albo

- zapisze współrzędne punktu P leżącego na prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$, np. $P=\left(x, \frac{4}{3}x\right)$ i wyznaczy odległość punktu P od danego punktu A jako funkcję jednej zmiennej x: $|AP|=\sqrt{(x-5)^2+\left(\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}\right)^2}$

albo

wyznaczy równania prostych AB i AD: $y+\frac{5}{3}=\frac{1}{7}(x-5)$ oraz $y+\frac{5}{3}=-7(x-5)$,

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający

- wyznaczy równanie prostej AC: $y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12}$ i obliczy współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu: $O=\left(1, \frac{4}{3}\right)$

albo

- obliczy odległość punktu A od prostej BD: 5 i obliczy pole kwadratu: 50

albo

- obliczy odległość punktu A od prostej BD: 5 i zapisze równanie

$$\left(x_O-5\right)^2+\left(\frac{4}{3}x_O+\frac{5}{3}\right)^2=25$$

albo

- obliczy x, dla którego odległość AP jest najmniejsza: $x=1$

albo

- wyznaczy równania prostych AB i AD oraz obliczy współrzędne wierzchołków B i D:

$$y+\frac{5}{3}=\frac{1}{7}(x-5),\ y+\frac{5}{3}=-7(x-5),\ B=\left(-2,-\frac{8}{3}\right),\ D=\left(4,\frac{16}{3}\right).$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający

- obliczy współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu: $O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$ i długość przekątnej kwadratu (lub połowę tej długości): 10

albo

- obliczy pole kwadratu: 50 i zapisze równanie $\left(x_O-5\right)^2+\left(\frac{4}{3}x_O+\frac{5}{3}\right)^2=25$

albo

- obliczy x, dla którego odległość AP jest najmniejsza: $x=1$ i obliczy współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu: $O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$

albo

- obliczy x, dla którego odległość AP jest najmniejsza: $x=1$ i długość przekątnej kwadratu: 10

albo

- obliczy współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu: $O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$ i długość boku kwadratu: $\sqrt{50}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy pole kwadratu**:** 50 oraz współrzędne punktu przecięcia przekątnych kwadratu: $O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

Uwagi
1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **3 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest:
   a) błąd przy ustalaniu współczynnika kierunkowego prostej *AC*, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;
   b) błąd polegający na zamianie miejscami współrzędnych punktu, np. przy podstawieniu do wzoru na odległość punktu od prostej, przy podstawieniu do wzoru na długość odcinka, przy obliczaniu współczynnika *b* w równaniu kierunkowym prostej *AC*, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie;
   c) błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru „$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$”, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeśli zdający zaznaczy w układzie współrzędnych punkt *A* i narysuje np. dwie proste, w których zawierają się przekątne kwadratu, a następnie odczyta i zapisze współrzędne punktu przecięcia się tych prostych i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów.**

Przykładowe rozwiązania
<u>I sposób</u>

Prosta *AC* jest prostopadła do prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$, więc współczynnik kierunkowy prostej *AC* jest równy $a_{AC}=-\frac{3}{4}$. Prosta *AC* przechodzi przez punkt $A=\left(5,-\frac{5}{3}\right)$, więc jej równanie ma postać

$$y+\frac{5}{3}=-\frac{3}{4}(x-5),$$
$$y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12}.$$

Obliczamy współrzędne punktu *O* przecięcia się prostych *AC* i *BD*, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{25}{12} \end{cases}.$$

Rozwiązaniem tego układu jest para liczb $x=1$ i $y=\frac{4}{3}$. Stąd $O=\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

Punkt *O* jest środkiem przekątnej *AC*, więc $|AC|=2|AO|=2\sqrt{(1-5)^2+\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\right)^2}$.

$$|AC|=2|AO|=2\sqrt{(-4)^2+\left(\frac{9}{3}\right)^2}=2\sqrt{16+9}=2\cdot 5=10.$$

Przekątna kwadratu ma długość $a\sqrt{2}$, gdzie *a* jest długością boku kwadratu.
Stąd $a\sqrt{2}=10$, czyli $a=5\sqrt{2}$.

Zatem pole kwadratu *ABCD* jest równe $a^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$.

Uwaga
Pole kwadratu *ABCD* możemy obliczyć, wykorzystując długość przekątnej kwadratu (lub jej połowy). Wtedy $P_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot|AC|^2=\frac{1}{2}\cdot 10^2=50$.

<u>II sposób</u>
Długość przekątnej kwadratu *ABCD* (lub jej połowy) możemy obliczyć, korzystając ze wzoru na odległość *d* punktu *A* od danej prostej. Wtedy

$$d=\frac{\left|\frac{4}{3}\cdot 5+\frac{5}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}}=5.$$

Zatem pole kwadratu *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD}=2\cdot d^2=2\cdot 5^2=50.$$

Punkt $O=(x_o,y_o)$ leży na prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$, więc $O=\left(x_o,\frac{4}{3}x_o\right)$, a skoro odległość *d* jest równa 5, to $|AO|^2=25$, czyli

$$\left(x_o-5\right)^2+\left(\frac{4}{3}x_o+\frac{5}{3}\right)^2=25,$$

$$x_o^{\ 2}-10x_o+25+\frac{16}{9}x_o^{\ 2}+\frac{40}{9}x_o+\frac{25}{9}-25=0,$$

$$\frac{25}{9}x_o^{\ 2}-\frac{50}{9}x_o+\frac{25}{9}=0,$$

$$x_o^{\ 2}-2x_o+1=0,$$

$$\left(x_o-1\right)^2=0,$$

Stąd $x_o=1$, więc $O=\left(1,\frac{4}{3}\cdot 1\right)=\left(1,\frac{4}{3}\right)$.

<u>III sposób</u> (*odległość jako funkcja jednej zmiennej*)

Niech punkt $P=\left(x,\ \frac{4}{3}x\right)$ będzie dowolnym punktem leżącym na prostej o równaniu $y=\frac{4}{3}x$.

Zapiszemy odległość punktu *P* od danego punktu $A=\left(5,-\frac{5}{3}\right)$ jako funkcję jednej zmiennej.

Obliczamy kolejno:

$$|AP|=\sqrt{(x-5)^2+\left(\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}\right)^2}=\sqrt{x^2-10x+25+\frac{16}{9}x^2+\frac{40}{9}x+\frac{25}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}\left(x^2-2x+10\right)}.$$

Zatem

$|AP|(x)=\frac{5}{3}\sqrt{(x-1)^2+9}$ dla każdej liczby rzeczywistej *x*.

Zauważamy, że trójmian kwadratowy $y=(x-1)^2+9$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $x=1$. Ponieważ funkcja f określona wzorem $f(t)=\sqrt{t}$ jest rosnąca, więc dla $x=1$ także i odległość $|AP|$ jest najmniejsza. Oznacza to, że odcinek *AP*, którego długość jest równa 5, jest zawarty w przekątnej *AC* kwadratu *ABCD*. Zatem przekątna tego kwadratu ma długość 10 oraz pole tego kwadratu jest równe $\frac{1}{2}\cdot 10^2=50$. Ponadto jeśli $x=1$, to punkt *P* ma współrzędne $\left(1,\frac{4}{3}\right)$ i jest szukanym punktem przecięcia przekątnych *AC* i *BD* kwadratu *ABCD*.

__IV sposób__ (*kąt między prostymi*)

Każda z prostych *AB* i *AD* zawierających boki kwadratu *ABCD* tworzą z prostą *BD* o równaniu $y=\frac{4}{3}x$, kąt 45°. Każda z nich przechodzi przez punkt $A=\left(5,-\frac{5}{3}\right)$, więc ma równanie postaci

$$y+\tfrac{5}{3}=a(x-5).$$

Ze wzoru na tangens kąta między prostymi otrzymujemy:

$$\left|\frac{\frac{4}{3}-a}{1+\frac{4}{3}\cdot a}\right|=\mathrm{tg}45^\circ=1,$$

$$\left|\tfrac{4}{3}-a\right|=\left|1+\tfrac{4}{3}a\right|,$$

$$\tfrac{4}{3}-a=1+\tfrac{4}{3}a \text{ lub } a-\tfrac{4}{3}=1+\tfrac{4}{3}a,$$

$$\tfrac{1}{3}=\tfrac{7}{3}a \text{ lub } -\tfrac{7}{3}=\tfrac{1}{3}a,$$

$$a=\tfrac{1}{7} \text{ lub } a=-7.$$

Zatem równania prostych *AB* i *AD* mają postać

$$y+\tfrac{5}{3}=\tfrac{1}{7}(x-5) \text{ oraz } y+\tfrac{5}{3}=-7(x-5),$$

$$y=\tfrac{1}{7}x-\tfrac{50}{21} \text{ oraz } y=-7x+\tfrac{100}{3}.$$

Obliczamy współrzędne wierzchołków *B* i *D*, rozwiązując układy równań

$$\begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ y=\frac{1}{7}x-\frac{50}{21}\end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} y=\frac{4}{3}x \\ y=-7x+\frac{100}{3}\end{cases}$$

Stąd otrzymujemy równania

$$\tfrac{4}{3}x=\tfrac{1}{7}x-\tfrac{50}{21} \quad \text{oraz} \quad \tfrac{4}{3}x=-7x+\tfrac{100}{3},$$

$$x=-2 \text{ oraz } x=4$$

Zatem $B=\left(-2,-\frac{8}{3}\right)$ oraz $D=\left(4,\frac{16}{3}\right)$.

Punkt *O* przecięcia przekątnych kwadratu ma zatem współrzędne

$$O=\left(\frac{-2+4}{2},\frac{-\frac{8}{3}+\frac{16}{3}}{2}\right)=\left(1,\tfrac{4}{3}\right).$$

Pole kwadratu *ABCD* jest równe

$$P_{ABCD}=|AB|^2=\left(\sqrt{(-2-5)^2+\left(-\frac{8}{3}+\frac{5}{3}\right)^2}\right)^2=7^2+(-1)^2=50.$$

Zadanie 33. (0–4)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na *n*-ty wyraz i sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).

Zasady oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ....1 p.
Zdający wykorzysta wzór na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisze

$$a_2 = a_1 \cdot q \text{ oraz } a_3 = a_1 \cdot q^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze równość $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$ w postaci

$$6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 = 0 \quad \text{lub} \quad a_1\left(q^2 - 5q + 6\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający rozwiąże równanie $q^2 - 5q + 6 = 0 : q = 2$ lub $q = 3$.
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne.. 4 p.
Zdający zapisze iloraz *q* ciągu geometrycznego (a_n) należący do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \right\rangle$:
$q = 3$.

Zasady oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania .... 1 p.
Zdający przy oznaczeniach $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$ wykorzysta własność ciągu geometrycznego i zapisze równość $b^2 = ac$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze równość $b^2 = ac$ i z równości $6a - 5b + c = 0$ wyznaczy jedną niewiadomą w zależności od dwóch pozostałych, np.: $c = 5b - 6a$
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający rozwiąże równanie $b^2 - 5ab + 6a^2 = 0$ z niewiadomą, np. *b*:

$$b_1 = 2a \text{ lub } b_2 = 3a$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający poda iloraz q ciągu geometrycznego (a_n): $q = 3$.

Uwagi do I i II sposobu oceniania

1. Jeżeli zdający zapisze równanie $6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 q^2 = 0$ i przyjmie jako pierwszy wyraz ciągu konkretną liczbę dodatnią, pisząc, np. że wartość pierwszego wyrazu nie ma wpływu na iloraz ciągu, a następnie rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **4 punkty.**
2. Jeżeli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z błędem i otrzyma co najmniej jedno rozwiązanie i konsekwentnie poda odpowiedź, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający zapisze równanie $6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 q^2 = 0$ i przyjmie jako pierwszy wyraz ciągu konkretną liczbę dodatnią i rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe z niewiadomą q oraz zapisze wnioski, konsekwentne do otrzymanych rozwiązań, dotyczące należenia bądź nie tych rozwiązań do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający zapisze równanie $6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 q^2 = 0$ i przyjmie jako pierwszy wyraz ciągu konkretną liczbę dodatnią, a następnie poda $q = 3$ i zapisze, że ten iloraz należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.
5. Jeżeli zdający zapisze równanie $6a_1 - 5a_1 \cdot q + a_1 q^2 = 0$ i przyjmie jako pierwszy wyraz ciągu konkretną liczbę dodatnią, a następnie poda $q = 2$ i zapisze, że ten iloraz nie należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający rozwiązuje równanie kwadratowe przy ujemnym wyróżniku, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **2 punkty.**
7. Jeżeli zdający zapisze konkretny ciąg o wyrazach dodatnich i ilorazie $q = 3$, np. $(1,3,9,...)$ oraz sprawdzi, że pierwszy, drugi i trzeci wyraz tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$ i zapisze, że ten iloraz należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty.**
8. Jeżeli zdający zapisze dwa konkretne ciągi o wyrazach dodatnich; jeden o ilorazie $q = 2$, np. (1,2,4,...), drugi o ilorazie $q = 3$, np. $(1,3,9,...)$ oraz sprawdzi, że pierwszy, drugi i trzeci wyraz każdego z tych ciągów spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$ i zapisze, że iloraz $q = 2$ nie należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$, a iloraz $q = 3$ należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**.
9. Jeżeli zdający poda $q = 3$ i zapisze, że ten iloraz należy do przedziału $\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.

10. Jeżeli zdający zapisze konkretny ciąg o wyrazach dodatnich i ilorazie $q=3$ oraz sprawdzi, że ten iloraz należy do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
11. Jeżeli zdający zapisze konkretny ciąg o wyrazach dodatnich i ilorazie $q=3$, np. $(1,3,9,...)$ oraz sprawdzi, że pierwszy, drugi i trzeci wyraz tego ciągu spełniają warunek $6a_1-5a_2+a_3=0$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1punkt**.
12. Jeżeli zdający zapisze konkretny ciąg o wyrazach dodatnich i ilorazie $q=2$, np. $(1,2,4,...)$ oraz sprawdzi, że pierwszy, drugi i trzeci wyraz tego ciągu spełniają warunek $6a_1-5a_2+a_3=0$ i zapisze, że ten iloraz nie należy do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **1 punkt**.
13. Jeżeli zdający poda $q=2$ i zapisze, że ten iloraz nie należy do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\rangle$ i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punktów**.
14. Jeżeli zdający myli własność ciągu geometrycznego z własnością ciągu arytmetycznego, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
15. Jeżeli zdający poda jedynie $q=3$ i na tym zakończy, to otrzymuje **0 punków**.

Przykładowe rozwiązania

<u>I sposób</u>

Oznaczamy przez *q* iloraz ciągu (a_n). Korzystamy ze wzoru na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego i zapisujemy równość

$$6a_1-5a_1\cdot q+a_1\cdot q^2=0,$$

Wyłączamy wspólny czynnik a_1 poza nawias $a_1\left(6-5\cdot q+q^2\right)=0$.

Ponieważ wyrazy ciągu są dodatnie, więc $a_1\neq 0$. Korzystamy z własności iloczynu równego zero i otrzymujemy równanie

$$q^2-5q+6=0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania $q=2$ lub $q=3$. Ponieważ $q\in\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right\rangle$, więc $q=3$.

<u>II sposób</u>

Niech *q* oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n) oraz niech $a_1=a,\ a_2=b,\ a_3=c$.

Zatem równość $6a_1-5a_2+a_3=0$ zapisujemy w postaci: $6a-5b+c=0$.

Stąd $c=5b-6a$. Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a,b,c) są dodatnie, więc ciąg ten jest geometryczny, gdy spełniona jest równość $b^2=ac$.

Podstawiamy do równania $b^2=ac$ za *c* i otrzymujemy:

$$b^2=a(5b-6a),$$

$$b^2-5ab+6a^2=0.$$

Rozwiązujemy to równanie przyjmując za niewiadomą, np. *b*.
Wtedy $\Delta = a^2$, $\sqrt{\Delta} = a$, ponieważ $a > 0$.

Zatem rozwiązaniami równania są

$$b_1 = \frac{5a-a}{2} = 2a \text{ lub } b_2 = \frac{5a+a}{2} = 3a.$$

Obliczamy iloraz *q* ciągu (a_n): $q = \frac{b}{a} = \frac{2a}{a} = 2$ lub $q = \frac{b}{a} = \frac{3a}{a} = 3$.

Ponieważ $q \in \left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \right\rangle$, więc iloraz ciągu (a_n) jest równy: $q = 3$.

Zadanie 34. (0–5)

Wymaganie ogólne	Wymaganie szczegółowe
IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami), oblicza miary tych kątów (9.2). 6. Trygonometria. Zdający wykorzystuje definicje i wyznacza wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów o miarach od $0°$ do $180°$ (6.1).

Zasady oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 p.

Zdający
- zaznaczy na rysunku kąt *α* nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy

albo
- zapisze równanie wynikające z definicji tangensa kąta *α*: $\frac{h}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{7}$

albo
- zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *SOE*:

  $h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_b^2$

albo
- zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *SEC*:

  $h_b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 6^2$

albo
- zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *SOC*:

  $h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6^2$

albo

- zapisze równanie wynikające z definicji sinusa kąta α : $\frac{h}{h_b}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

albo

- zapisze równanie wynikające z definicji cosinusa kąta α : $\frac{\frac{a}{2}}{h_b}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.
Zdający zapisze

- układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\frac{h}{\frac{1}{2}a}=\sqrt{7} \quad \text{i} \quad h^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=6^2$$

lub

- układ trzech równań z trzema niewiadomymi, np.:

$$\frac{h}{h_b}=\frac{\sqrt{14}}{4} \quad \text{i} \quad h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=h_b^{\,2} \quad \text{i} \quad h^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=6^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.
Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=6^2 \quad \text{lub} \quad h^2+\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{7}}h\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2=6^2 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{4}h_b^{\,2}+\left(\frac{\sqrt{14}}{4}h_b\right)^2=6^2$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.
Zdający:

- obliczy długość krawędzi podstawy ostrosłupa lub wysokość ostrosłupa: $a=4$, $h=2\sqrt{7}$

albo

- obliczy wysokość h_b ściany bocznej ostrosłupa oraz wyznaczy objętość ostrosłupa

  w zależności od tej wysokości: $h_b=4\sqrt{2}$, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}h_b^{\,2}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}h_b$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy

Rozwiązanie pełne.. 5 p.

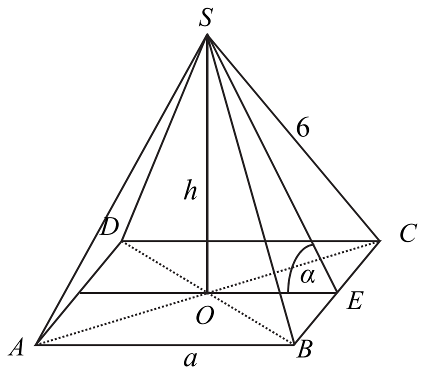
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V=\frac{32\sqrt{7}}{3}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błędy rachunkowe, które nie przekreślają poprawności rozumowania i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać za całe rozwiązanie co najwyżej **4 punkty**.
2. Jeżeli jedynym błędem zdającego jest pominięcie współczynnika $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa, to otrzymuje **4 punkty**.

3. Jeżeli jedynym błędem jest:
   a) zastosowanie niepoprawnej definicji tangensa (lub niepoprawnej definicji innej funkcji trygonometrycznej wykorzystanej przez zdającego), np. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_b}{h}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{a}$
   b) niepoprawne zastosowanie twierdzenia Pitagorasa,
   c) błąd polegający na zastosowaniu niepoprawnego wzoru „$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$”,
   to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, o ile nie popełnia innych błędów i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca.
4. Jeżeli zdający popełnia jeden błąd, opisany w uwadze 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, ale poprawnie realizuje strategię rozwiązania, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
5. Jeżeli zdający błędnie interpretuje kąt między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa, to otrzymuje co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile poprawnie zastosuje twierdzenie Pitagorasa.
6. Jeżeli zdający przyjmuje, że krawędź podstawy ostrosłupa jest równa 6, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile zapisze poprawny związek między wielkościami h, h_b i a lub zaznaczy poprawnie kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.
7. Akceptujemy poprawne przybliżenia liczb rzeczywistych.

Przykładowe rozwiązanie
<u>I sposób</u>
Zaznaczmy na rysunku kąt α – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy i wprowadzamy następujące oznaczenia:
a – krawędź podstawy ostrosłupa, h – wysokość ostrosłupa.



Korzystając z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym SOE otrzymujemy związek $\frac{h}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{7}$, czyli $h = \frac{\sqrt{7}}{2}a$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie SOC wynika równanie $h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6^2$.

Wykorzystując wcześniejszą zależność otrzymujemy

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6^2$$

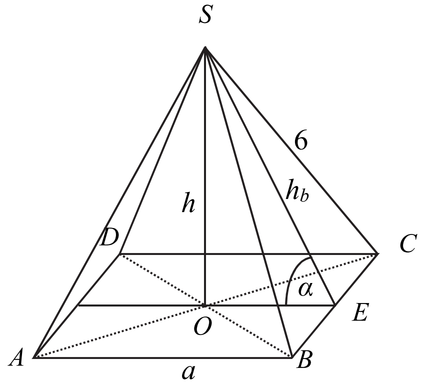
$$\frac{7}{4}a^2 + \frac{2}{4}a^2 = 36$$

$\frac{9}{4}a^2 = 36$, stąd $a^2 = 16$, czyli $a = 4$.

Stąd $h = 4\cdot\frac{\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7}$. Obliczamy objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{7} = \frac{32\sqrt{7}}{3}$.

<u>II sposób</u>

Zaznaczmy na rysunku kąt *α* – kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy i wprowadzamy następujące oznaczenia:
a – krawędź podstawy ostrosłupa, *h* – wysokość ostrosłupa, h_b – wysokość ściany bocznej ostrosłupa



Korzystając z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym *SOE* otrzymujemy:

$\frac{h}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{7}$, czyli $h = \frac{\sqrt{7}}{2}a$.

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym *SEC* otrzymujemy

$$h_b^2 = 6^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad h_b^2 = \frac{144 - a^2}{4}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SOE otrzymujemy

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_b^2.$$

Zatem

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{144 - a^2}{4},$$

$$\frac{7}{4}a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{144 - a^2}{4}$$

$$a^2 = 16.$$

Stąd $a = 4$, więc $h = 2\sqrt{7}$.

Objętość ostrosłupa jest równa: $V = \frac{1}{3}\cdot 4^2\cdot 2\sqrt{7} = \frac{32}{3}\sqrt{7}$.

Uwaga

Zależności między wielkościami *h*, *a* i h_b możemy też otrzymać, wykorzystując definicje funkcji sinus lub cosinus kąta *α*. Jeżeli $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{7}$, to $\sin\alpha = \frac{\sqrt{14}}{4}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Stąd $\frac{h}{h_b} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ oraz $\frac{\frac{1}{2}a}{h_b} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ocena prac osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Obowiązują zasady oceniania stosowane przy sprawdzaniu prac zdających bez stwierdzonej dyskalkulii z dodatkowym uwzględnieniem:

I. ogólnych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią (punkty 1.–12.);
II. dodatkowych szczegółowych zasad oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią – matura z matematyki, poziom podstawowy, termin główny 2020.

I. Ogólne zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

1. Nie należy traktować jako błędy merytoryczne pomyłek, wynikających z:
   - błędnego przepisania,
   - przestawienia cyfr,
   - zapisania innej cyfry, ale o podobnym wyglądzie,
   - przestawienia położenia przecinka.
2. W przypadku błędów, wynikających ze zmiany znaku liczby, należy w każdym zadaniu oddzielnie przeanalizować, czy zdający opanował inne umiejętności, poza umiejętnościami rachunkowymi, oceniane w zadaniu. W przypadku opanowania badanych umiejętności zdający powinien otrzymać przynajmniej 1 punkt.
3. We wszystkich zadaniach otwartych, w których wskazano poprawną metodę rozwiązania, części lub całości zadania, zdającemu należy przyznać przynajmniej 1 punkt, zgodnie z kryteriami do poszczególnych zadań.
4. Jeśli zdający przedstawia nieprecyzyjne zapisy, na przykład pomija nawiasy lub zapisuje nawiasy w niewłaściwych miejscach, ale przeprowadza poprawne rozumowanie lub stosuje właściwą strategię, to może otrzymać przynajmniej 1 punkt za rozwiązanie zadania.
5. W przypadku zadania wymagającego wyznaczenia pierwiastków trójmianu kwadratowego zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi poprawną metodę wyznaczania pierwiastków trójmianu kwadratowego, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
6. W przypadku zadania wymagającego rozwiązania nierówności kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli stosuje poprawny algorytm rozwiązywania nierówności kwadratowej, przy podanych w treści zadania wartościach liczbowych.
7. W przypadku zadania wymagającego stosowania własności funkcji kwadratowej zdający może otrzymać 1 punkt za wykorzystanie konkretnych własności funkcji kwadratowej, istotnych przy poszukiwaniu rozwiązania.
8. W przypadku zadania wymagającego zastosowania własności ciągów arytmetycznych lub geometrycznych zdający może otrzymać 1 punkt, jeżeli przedstawi wykorzystanie takiej własności ciągu, która umożliwia znalezienie rozwiązania zadania.
9. W przypadku zadania wymagającego analizowania figur geometrycznych na płaszczyźnie kartezjańskiej zdający może otrzymać punkty, jeżeli przy poszukiwaniu rozwiązania przedstawi poprawne rozumowanie, wykorzystujące własności figur geometrycznych lub zapisze zależności, pozwalające rozwiązać zadanie.
10. W przypadku zadania z rachunku prawdopodobieństwa zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeśli przy wyznaczaniu liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu przyjmuje określoną regularność lub podaje prawidłową metodę wyznaczenia tej liczby zdarzeń elementarnych.
11. W przypadku zadania z geometrii zdający może otrzymać przynajmniej 1 punkt, jeżeli podaje poprawną metodę wyznaczenia długości odcinka potrzebnej do znalezienia rozwiązania.
12. W przypadku zadania wymagającego przeprowadzenia dowodu (z zakresu algebry lub geometrii), jeśli w przedstawionym rozwiązaniu zdający powoła się na własność, która

wyznacza istotny postęp, prowadzący do przeprowadzenia dowodu, to może otrzymać 1 punkt.

II. Dodatkowe szczegółowe zasady oceniania zadań otwartych w przypadku arkuszy osób ze stwierdzoną dyskalkulią

Zadanie 26. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- w wyniku przekształceń algebraicznych doprowadza nierówność do postaci $ax^2+bx+c>0$, gdzie $\Delta>0$ (wystarczy, że z rozwiązania zdającego wynika, że traktuje otrzymaną nierówność jak nierówność kwadratową) oraz stosuje wzory na pierwiastki trójmianu kwadratowego i oblicza te pierwiastki.

lub

- rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, z których jednym będzie $(x-1)$

lub

- poprawnie rozwiąże nierówność $2(x-1)(x+3)>0$.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- Pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

$$(-\infty,1)\cup\left(-\frac{5}{2},+\infty\right),\ \left(+\infty,-\frac{5}{2}\right)\cup(1,-\infty)$$

Uwaga!
Jeżeli zdający zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci sumy przedziałów domkniętych, to może **otrzymać co najwyżej 1 pkt.**

Zadanie 27. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- poda co najmniej dwa poprawne rozwiązania równania.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- przyrówna każdy z czynników do zera, wyznaczy 4 pierwiastki, z których dwa będą prawidłowe (obliczone z jednego czynnika), a w obliczeniu pozostałych pierwiastków będą występowały błędy opisane w pkt 1. i 2. dodatkowych zasad

lub

- przyrówna każdy z czynników do zera i wyznaczy pierwiastki równania: $x=1,\ x=0,\ x=2$ (z pominięciem $x=-1$).

Zadanie 28. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $a^2-2ab+2b^2$ w zależności od zmiennej a lub b

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- zapisze nierówność w postaci równoważnej $(a-b)^2+b^2>0$ oraz stwierdzi (lub zaznaczy), że każdy ze składników lewej strony nierówności jest dodatni.

Zadanie 29. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze poprawną proporcję między długościami boków trójkątów CBD i CEF, wynikającą z ich podobieństwa np.:

$$\frac{|CF|}{|CE|} = \frac{|CD|}{|CB|}$$

lub

- ustali związki miarowe między długościami boków w jednym z trójkątów prostokątnych CBD lub CEF.

Zadanie 30. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zapisze jedynie liczbę 36 (należy traktować to jako wyznaczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych)

lub

- zapisze liczbę 11, a z zapisów wynika, że interpretuje tę liczbę jako liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A* (np. zilustruje to wypisaniem kilku zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*, ale nie zapisze zdarzeń elementarnych, które nie sprzyjają zdarzeniu *A*).

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- poprawnie wypisze (lub zaznaczy) wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A*, popełni błąd w ich zliczeniu i konsekwentnie zapisze wynik $\frac{x}{36}$, gdzie x jest liczbą zliczonych zdarzeń elementarnych sprzyjających *A*.

Uwaga!

W ocenie rozwiązania zadania 30. (dla zdających z dyskalkulią) nie stosuje się następującej uwagi z zasad oceniania arkuszy standardowych:

Jeżeli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie 0 punktów, o ile końcowy wynik nie jest skutkiem błędu w działaniach na ułamkach.

Zadanie 31. (0–2)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- doprowadzi równanie $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$ do postaci $a\sin\alpha = b\cos\alpha$, popełniając ewentualnie błędy opisane w pkt 1. i 2. dodatkowych zasad oceniania

lub

- poprawnie zastosuje definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i poprawnie zapisze równanie $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha} = 4$ w postaci, w której występują jedynie długości boków trójkąta prostokątnego.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- doprowadzi do równania: $2\operatorname{tg}\alpha = 1$.

Zadanie 32. (0–4)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- poprawnie wyznaczy współczynnik kierunkowy prostej *AC*: $-\frac{3}{4}$.

lub

- poprawnie zastosuje wzór na odległość punktu *A* od prostej *BD*.

Zdający otrzymuje 2 pkt, jeżeli:

- zdający wyznaczy poprawne równanie prostej *AC*, zapisuje układ równań, pozwalający obliczyć współrzędne punktu *O* i rozwiązuje ten układ równań

lub

- zdający obliczy odległość punktu *A* od prostej *BD* i stosuje poprawną metodę obliczenia pola kwadratu, z wykorzystaniem obliczonej odległości.

Zadanie 33. (0–4)

Stosują się zasady oceniania arkusza standardowego.

Zadanie 34. (0–5)

Zdający otrzymuje 1 pkt, jeżeli:

- zastosuje poprawnie twierdzenie Pitagorasa dla jednego z trójkątów: *SOE* lub *SEC* lub *SOC*

lub

- zastosuje poprawnie definicję funkcji tangens w trójkącie *SOE* dla kąta α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OS|}{|OE|}.$$