

<i>Rodzaj dokumentu:</i>	<b>Zasady oceniania rozwiązań zadań</b>
<i>Egzamin:</i>	<b>Egzamin maturalny</b>
<i>Przedmiot:</i>	<b>Matematyka</b>
<i>Poziom:</i>	<b>Poziom podstawowy</b>
<i>Formy arkusza:</i>	EMAP-P0-100, EMAP-P0-200, EMAP-P0-300, EMAP-P0-400, EMAP-P0-600, EMAP-P0-700, EMAP-P0-Q00, EMAP-P0-Z00
<i>Termin egzaminu:</i>	2 czerwca 2023 r.

## ZADANIA ZAMKNIĘTE

### Zadanie 1. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 2. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 3. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 4. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 5. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 6. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 7. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 8. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 9. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 10. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 11. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 12. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 13. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 14. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 15. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 16. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 17. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 18. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 19. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 20. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

A

### Zadanie 21. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 22. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

D

### Zadanie 23. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

### Zadanie 24. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

C

### Zadanie 25. (0–1)

#### Zasady oceniania

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

#### Rozwiązanie

B

**Zadanie 26. (0–1)**

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

**Zadanie 27. (0–1)**

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

C

**Zadanie 28. (0–1)**

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

A

**Zadanie 29. (0–1)**

**Zasady oceniania**

1 pkt – odpowiedź poprawna.

0 pkt – odpowiedź niepoprawna albo brak odpowiedzi.

**Rozwiązanie**

D

## ZADANIA OTWARTE

### Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający poprawnie rozwiąże zadanie i otrzyma poprawny wynik, lecz w końcowym zapisie przekształca ten wynik i popełnia przy tym błąd, to może uzyskać maksymalną liczbę punktów.
3. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej  $(n - 1)$  punktów (gdzie  $n$  jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

### Zadanie 30. (0–2)

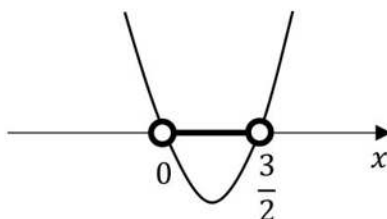
#### Zasady oceniania

2 pkt – spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz**

zapisanie zbioru rozwiązań nierówności:  $(0, \frac{3}{2})$  lub  $x \in (0, \frac{3}{2})$

ALBO

- spełnienie jednego z warunków określonych w zasadach oceniania za 1 pkt **oraz** przedstawienie zbioru rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziału



1 pkt – obliczenie lub podanie pierwiastków trójmianu kwadratowego  $2x^2 - 3x$ :

$$x_1 = 0 \text{ oraz } x_2 = \frac{3}{2}$$

ALBO

- zaznaczenie na wykresie funkcji kwadratowej  $f(x) = 2x^2 - 3x$  miejsc zerowych tej funkcji i podanie tych miejsc zerowych:  $x_1 = 0$  oraz  $x_2 = \frac{3}{2}$ ,

ALBO

- poprawne rozwiązanie nierówności  $x(2x - 1) < 2x$  dla dwóch przypadków (spośród trzech) rozpatrywanych w sposobie 2.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

### Uwagi:

1. Jeżeli zdający, obliczając pierwiastki trójmianu  $2x^2 - 3x$ , popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu zapisze zbiór rozwiązań nierówności, to otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.



2. Jeżeli zdający wyznacza pierwiastki trójmianu kwadratowego w przypadku, gdy błędnie obliczony przez zdającego wyróżnik  $\Delta$  jest ujemny, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający rozpatruje inny niż podany w zadaniu trójmian kwadratowy, który nie wynika z błędu przekształcenia (np.  $2x^2 - x$ ) i w konsekwencji rozpatruje inną nierówność (np.  $2x^2 - x < 0$ ), to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający dzieli obie strony nierówności przez  $x$  (albo  $2x$ ) bez stosownego założenia, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

### Kryteria uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci  $(\frac{3}{2}, 0)$  (lub  $x \in (\frac{3}{2}, 0)$ ), to otrzymuje **2 punkty**.

### Przykładowe pełne rozwiązania

#### Sposób 1.

Przekształcamy nierówność równoważnie:

$$x(2x - 1) < 2x$$

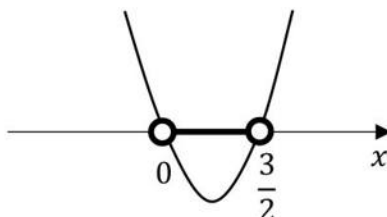
$$2x^2 - x - 2x < 0$$

$$2x^2 - 3x < 0$$

$$2x \left( x - \frac{3}{2} \right) < 0$$

Odczytujemy i zapisujemy pierwiastki trójmianu  $2x \left( x - \frac{3}{2} \right)$ :  $x = 0$  lub  $x = \frac{3}{2}$ .

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:  $(0, \frac{3}{2})$  lub  $x \in (0, \frac{3}{2})$ , lub zaznaczamy zbiór rozwiązań na osi liczbowej



#### Inna realizacja obliczenia pierwiastków trójmianu:

Przekształcamy równoważnie nierówność do postaci  $2x^2 - 3x < 0$ , obliczamy wyróżnik  $\Delta$  trójmianu  $2x^2 - 3x$ , a następnie pierwiastki tego trójmianu:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 9$$

$$x = \frac{-(-3) - 3}{2 \cdot 2} = 0 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-(-3) + 3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

Sposób 2.

Rozpatrujemy trzy przypadki:

a)  $x \in (-\infty, 0)$

Przekształcamy nierówność, otrzymując:

$$x(2x - 1) < 2x \quad /: x$$

$$2x - 1 > 2$$

$$x > \frac{3}{2}$$

Nierówność  $x(2x - 1) < 2x$  nie ma rozwiązań w zbiorze  $(-\infty, 0)$ .

b)  $x = 0$

Gdy  $x = 0$ , to otrzymujemy nierówność  $0 \cdot (2 \cdot 0 - 1) < 2 \cdot 0$ , która jest fałszywa. Zatem liczba  $0$  nie jest rozwiązaniem nierówności  $x(2x - 1) < 2x$ .

c)  $x \in (0, +\infty)$

Przekształcamy nierówność, otrzymując:

$$x(2x - 1) < 2x \quad /: x$$

$$2x - 1 < 2$$

$$x < \frac{3}{2}$$

W zbiorze  $(0, +\infty)$  rozwiązaniami nierówności  $x(2x - 1) < 2x$  są wszystkie liczby z przedziału  $(0, \frac{3}{2})$ .

Ostatecznie zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności  $x(2x - 1) < 2x$  jest  $(0, \frac{3}{2})$ .

**Zadanie 31. (0–2)****Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnego wyniku:  $-\sqrt{7}$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{7}$ .

1 pkt – zapisanie alternatywy równań  $2x^2 + 3x = 0$  lub  $x^2 - 7 = 0$

ALBO

– wyznaczenie/podanie wszystkich rozwiązań równania  $2x^2 + 3x = 0$ :  $x = 0$  oraz

$$x = -\frac{3}{2},$$

ALBO

– wyznaczenie/podanie wszystkich rozwiązań równania  $x^2 - 7 = 0$ :  $x = -\sqrt{7}$  oraz

$$x = \sqrt{7}.$$

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania  $(2x^2 + 3x)(x^2 - 7) = 0$  przez wielomian

$2x^2 + 3x$  (lub przez  $x$ , lub przez  $x^2 - 7$ ) bez stosownego założenia i wyznacza rozwiązania tak powstałego równania, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający poprawnie wyznaczy wszystkie rozwiązania równania  $2x^2 + 3x = 0$  oraz

równania  $x^2 - 7 = 0$ , lecz poda błędną odpowiedź, np.  $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{7}, -\frac{3}{2}, 0, \sqrt{7}\}$ , to

otrzymuje **1 punkt** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Przekształcamy równanie do postaci alternatywy i otrzymujemy:

$$(2x^2 + 3x)(x^2 - 7) = 0$$

$$2x^2 + 3x = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 - 7 = 0$$

$$x(2x + 3) = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 = 7$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + 3 = 0 \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{7}$$

$$x = 0 \quad \text{lub} \quad x = -\frac{3}{2} \quad \text{lub} \quad x = -\sqrt{7} \quad \text{lub} \quad x = \sqrt{7}$$

Rozwiązaniami równania są liczby:  $-\sqrt{7}$ ,  $-\frac{3}{2}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{7}$ .

**Zadanie 32. (0–2)****Zasady oceniania**

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania, tzn. spełnienie kryterium określonego w zasadach oceniania za 1 pkt oraz sformułowanie poprawnego wniosku z powołaniem się na założenie.

1 pkt – przekształcenie nierówności  $a^2 + 3b^2 + 4 > 2a + 6b$  do postaci równoważnej  $(a - 1)^2 + 3(b - 1)^2 > 0$

*ALBO*

– obliczenie wyróżnika  $\Delta$  trójmianu  $a^2 - 2a + (3b^2 - 6b + 4)$  zmiennej  $a$  i zapisanie go w postaci  $\Delta = -12(b - 1)^2$ ,

*ALBO*

– obliczenie wyróżnika  $\Delta$  trójmianu  $3b^2 - 6b + (a^2 - 2a + 4)$  zmiennej  $b$  i zapisanie go w postaci  $\Delta = -12(a - 1)^2$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeśli zdający sprawdza prawdziwość nierówności tylko dla wybranych wartości  $a$  i  $b$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1.

Przekształcamy równoważnie nierówność  $a^2 + 3b^2 + 4 > 2a + 6b$ :

$$a^2 - 2a + 3b^2 - 6b + 4 > 0$$

$$a^2 - 2a + 1 + 3b^2 - 6b + 3 > 0$$

$$(a - 1)^2 + 3(b^2 - 2b + 1) > 0$$

$$(a - 1)^2 + 3(b - 1)^2 > 0$$

Liczby  $(a - 1)^2$  oraz  $(b - 1)^2$  są nieujemne jako kwadraty liczb rzeczywistych.

Z założenia wiadomo, że  $b \neq a$ , więc liczby  $a - 1$  oraz  $b - 1$  nie mogą być jednocześnie zerami. Stąd co najmniej jedna z liczb:  $(a - 1)^2$  lub  $(b - 1)^2$  jest dodatnia. Zatem

$(a - 1)^2 + 3(b - 1)^2$  jest liczbą dodatnią jako suma liczby nieujemnej i liczby dodatniej.

Ponieważ nierówność  $(a - 1)^2 + 3(b - 1)^2 > 0$  jest prawdziwa, więc nierówność  $a^2 + 3b^2 + 4 > 2a + 6b$  również jest prawdziwa. To należało pokazać.

Sposób 2.

Przekształcamy równoważnie nierówność  $a^2 + 3b^2 + 4 > 2a + 6b$  i otrzymujemy  $a^2 - 2a + 3b^2 - 6b + 4 > 0$ .

Wyrażenie  $a^2 - 2a + (3b^2 - 6b + 4)$  traktujemy jako trójmian kwadratowy zmiennej  $a$ . Obliczamy wyróżnik  $\Delta$  trójmianu:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (3b^2 - 6b + 4)$$

$$\Delta = 4 - 12b^2 + 24b - 16$$

$$\Delta = -12(b^2 - 2b + 1)$$

$$\Delta = -12(b - 1)^2$$

Gdy  $b \neq 1$ , to  $\Delta < 0$  i funkcja kwadratowa  $f(a) = a^2 - 2a + (3b^2 - 6b + 4)$  zmiennej  $a$  nie ma miejsc zerowych, a ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji  $f$  nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja przyjmuje wtedy tylko wartości dodatnie.

Gdy  $b = 1$ , to  $\Delta = 0$  i funkcja  $f$  ma dokładnie jedno miejsce zerowe:  $a = 1$ . Ponieważ współczynnik przy drugiej potędze zmiennej jest dodatni, więc żaden fragment wykresu funkcji  $f$  nie leży poniżej osi odciętych. Zatem funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie dla każdego  $a \neq 1$ . Czyli dla  $a \neq b$  funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Ostatecznie, gdy  $a \neq b$ , to funkcja  $f$  przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, że dla każdych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$  takich, że  $b \neq a$  spełniona jest nierówność  $a^2 + 3b^2 + 4 > 2a + 6b$ . To należało pokazać.

**Zadanie 33. (0–2)****Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnego wyniku:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3 \text{ [lub } f(x) = -\frac{3}{4}(x-0)^2 + 3, \text{ lub } f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)(x+2) \text{].}$$

1 pkt – zapisanie wzoru funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = ax^2 + 3$  lub  $f(x) = a(x-0)^2 + 3$

ALBO

– zapisanie, że liczba  $(-2)$  jest miejscem zerowym funkcji  $f$ ,

ALBO

– zapisanie wzoru funkcji  $f$  w postaci  $f(x) = a(x-2)(x+2)$ ,

ALBO

– obliczenie/zapisanie wartości współczynników  $b$  oraz  $c$ :  $b = 0$  oraz  $c = 3$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwaga:**

Jeśli zdający przyjmuje/zapisuje wzór funkcji w postaci  $f(x) = ax^2 + 3$  lub

$f(x) = a(x-0)^2 + 3$  z konkretną ustaloną liczbą  $a$  [różną od 0 i różną od  $(-\frac{3}{4})$ ], to otrzymuje **1 punkt**.

**Przykładowe pełne rozwiązania**Sposób 1.

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej:  $f(x) = a(x-0)^2 + 3$ .

Obliczamy  $a$ , korzystając z informacji, że punkt  $B = (2, 0)$  leży na wykresie funkcji  $f$ :

$$0 = a(2-0)^2 + 3$$

$$0 = 4a + 3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$ :  $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ .

Sposób 2.

Punkt  $B = (2, 0)$  leży na wykresie funkcji  $f$ , więc liczba 2 jest miejscem zerowym tej funkcji. Obliczamy drugie miejsce zerowe  $(x_2)$  funkcji  $f$ , korzystając z informacji, że punkt  $A = (0, 3)$  jest wierzchołkiem paraboli:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$0 = \frac{2 + x_2}{2}$$

$$x_2 = -2$$

Zapisujemy wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci iloczynowej:  $f(x) = a(x - 2)(x + 2)$ .  
Obliczamy  $a$ , korzystając z informacji, że punkt  $A = (0, 3)$  leży na wykresie funkcji  $f$ :

$$3 = a(0 - 2)(0 + 2)$$

$$3 = -4a$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$ :  $f(x) = -\frac{3}{4}(x - 2)(x + 2)$ .

### Sposób 3.

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w postaci ogólnej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Ponieważ  $A = (0, 3)$  jest wierzchołkiem paraboli, więc

$$-\frac{b}{2a} = 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{\Delta}{4a} = 3$$

Stąd

$$b = 0 \quad \text{oraz} \quad -\frac{0^2 - 4ac}{4a} = 3$$

$$b = 0 \quad \text{oraz} \quad c = 3$$

Zatem  $f(x) = ax^2 + 3$ . Wyznaczamy współczynnik  $a$ , korzystając z informacji, że punkt  $B = (2, 0)$  leży na wykresie funkcji  $f$ :

$$0 = a \cdot 2^2 + 3$$

$$0 = 4a + 3$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Zapisujemy wzór funkcji  $f$ :  $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3$ .

### Zadanie 34. (0–2)

#### Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i uzyskanie poprawnego wyniku:  $4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$  (lub  $2\sqrt{5}(2 + \sqrt{2})$ ).

1 pkt – obliczenie długości jednego z boków trójkąta  $ABC$ , np.  $|AB| = 2\sqrt{5}$

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą, które wynika z zastosowania twierdzenia Pitagorasa do trójkąta  $CAD$ , i zapisanie obwodu trójkąta  $ABC$  w zależności od tej niewiadomej, np.  $a^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot a\right)^2 = 5^2$  i  $L = 2a + a\sqrt{2}$  (gdzie  $a = |AC|$ ).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

#### Przykładowe pełne rozwiązanie

Oznaczmy przez  $a$  długość przyprostokątnej trójkąta  $ABC$ . Stosujemy do trójkąta  $CAD$  twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy:

$$a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = 5^2$$

$$\frac{5}{4}a^2 = 25$$

$$a^2 = 20$$

$$a = 2\sqrt{5}$$

Obliczamy obwód  $L$  trójkąta  $ABC$ :  $L = 2a + a\sqrt{2} = 2 \cdot 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$ .



**Zadanie 35. (0–2)****Zasady oceniania**

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia  $A$

i uzyskanie poprawnego wyniku:  $P(A) = \frac{8}{56}$ .

1 pkt – wypisanie wszystkich zdarzeń elementarnych lub obliczenie/podanie liczby tych zdarzeń:  $|\Omega| = 8 \cdot 7$

ALBO

– wypisanie (zaznaczenie w tabeli) wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  i niewypisanie żadnego niewłaściwego:

$(1, 3), (1, 7), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (6, 2), (7, 1),$

ALBO

– podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ :

$|A| = 8$ , jeśli nie została otrzymana w wyniku zastosowania błędnej metody,

ALBO

– sporządzenie fragmentu drzewa stochastycznego, które zawiera wszystkie gałęzie

sprzyjające zdarzeniu  $A$  oraz zapisanie prawdopodobieństwa  $\frac{1}{8}$  na co najmniej

jednym z odcinków pierwszego etapu doświadczenia i prawdopodobieństwa  $\frac{1}{7}$  na co najmniej jednym z odcinków drugiego etapu doświadczenia,

ALBO

– zapisanie tylko  $P(A) = \frac{8}{56}$ .

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

**Uwagi:**

1. Jeżeli zdający zapisuje tylko liczby 8 oraz 56 i z rozwiązania nie wynika znaczenie tych liczb, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
2. Jeżeli zdający sporządzi jedynie tabelę o 64 (lub 56) pustych polach, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

**Przykładowe pełne rozwiązania**

Sposób 1. (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb  $(a, b)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  i  $a \neq b$ .

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 8 \cdot 7 = 56$ .

Zdarzeniu  $A$  sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:

$(1, 3), (1, 7), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (5, 3), (6, 2), (7, 1),$

więc  $|A| = 8$ .

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe:  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$ .

Sposób 2.

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie uporządkowane pary liczb  $(a, b)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  i  $a \neq b$ .

Jest to model klasyczny. Budujemy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu.

**I losowanie**

		1	2	3	4	5	6	7	8
II losowanie	1	X		+				+	
	2		X				+		
	3	+		X		+			
	4				X				
	5			+		X			
	6		+				X		
	7	+						X	
	8								X

Białe pola tabeli odpowiadają zdarzeniom elementarnym. Symbolem „+” oznaczono pola odpowiadające zdarzeniom elementarnym sprzyjającym zdarzeniu  $A$ .

Wszystkich zdarzeń elementarnych w tym doświadczeniu jest 56.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest równa 8.

$$\text{Stąd } P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}.$$

**Zadanie 36. (0–5)****Zasady oceniania**

Rozwiązanie składa się z dwóch etapów.

**Pierwszy etap** polega na obliczeniu współrzędnych wierzchołka  $A$  trapezu:  $A = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje, gdy obliczy/zapisze współczynnik kierunkowy prostej  $AB$ :  $a = \frac{3}{4}$ .

**2 punkty** zdający otrzymuje, gdy obliczy współrzędne punktu  $E$ :  $E = \left(\frac{15}{2}, 5\right)$ .

**3 punkty** zdający otrzymuje, gdy obliczy współrzędne punktu  $A$ :  $A = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$ .

**Drugi etap** polega na obliczeniu pola trapezu:  $P = \frac{225}{4}$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje, gdy obliczy długość podstawy  $AB$  lub długość odcinka  $EB$ , lub wysokość trapezu:  $|AB| = 10$  lub  $|EB| = 5$ , lub  $h = \frac{15}{2}$ .

**2 punkty** zdający otrzymuje, gdy obliczy pole trapezu:  $P = \frac{225}{4}$ .

**Przykładowe pełne rozwiązanie**

Oś symetrii trapezu równoramiennego jest prostopadła po podstaw tego trapezu. Zatem prosta  $AB$  jest prostopadła do prostej  $y = -\frac{4}{3}x + 15$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = ax + b$ .

Z warunku prostopadłości prostych obliczamy współczynnik kierunkowy  $a$  prostej  $AB$ :

$$-\frac{4}{3} \cdot a = -1$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Prosta  $AB$  przechodzi przez punkt  $B = \left(\frac{23}{2}, 8\right)$ , więc

$$8 = \frac{3}{4} \cdot \frac{23}{2} + b$$

$$b = -\frac{5}{8}$$

Równanie prostej  $AB$ :  $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8}$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $E$  przecięcia osi symetrii z prostą  $AB$ :

$$-\frac{4}{3}x + 15 = \frac{3}{4}x - \frac{5}{8} \quad / \cdot 24$$

$$-32x + 360 = 18x - 15$$

$$-50x = -375$$

$$x = \frac{15}{2}$$

$$y = \frac{3}{4} \cdot \frac{15}{2} - \frac{5}{8} = 5$$

$$E = \left(\frac{15}{2}, 5\right)$$

Obliczamy współrzędne wierzchołka  $A = (x_A, y_A)$ :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_E \quad \text{oraz} \quad \frac{y_A + y_B}{2} = y_E$$

$$\frac{x_A + \frac{23}{2}}{2} = \frac{15}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{y_A + 8}{2} = 5$$

$$x_A = \frac{7}{2} \quad \text{oraz} \quad y_A = 2$$

Obliczamy długości podstawy  $AB$  i wysokość  $h$  trapezu:

$$|AB| = 2 \cdot |EB| = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{23}{2} - \frac{15}{2}\right)^2 + (8 - 5)^2} = 2 \cdot \sqrt{16 + 9} = 2 \cdot 5 = 10$$

$$h = |EF| = \sqrt{\left(3 - \frac{15}{2}\right)^2 + (11 - 5)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

Obliczamy pole  $P$  trapezu:

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h = \frac{10 + 5}{2} \cdot \frac{15}{2} = \frac{225}{4}$$