Styczeń 2003 - matura próbna według nowych zasad

Numer zadania	Etapy rozwiązywania zadania	Maksymalna liczba punktów za dany etap
11.1	Wyznaczenie współrzędnch wierzchołka paraboli: $W(3,4)$.	1 pkt
11.2	Obliczenie wartości $f = -5$.	1 pkt
11.3	Obliczenie wartości $f = -12$.	1 pkt
11.4	Zapisanie odpowiedzi: funkcja f w przedziale $\langle 0;7 \rangle$.	1 pkt
12.1	Przekształcenie danego równania do postaci np. równania: $x(a-1)(a+1) = a+1$.	1 pkt
12.2	Zapisanie, że dla $a = 1$ dane równanie nie ma żadnego rozwiązania.	1 pkt
12.3	Zapisanie, że dla $a = -1$ dane równanie ma nieskończenie rozwiązań.	1 pkt
11.4	Zapisanie, że dla $a \neq 1$ i $a \neq -1$ dane równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie.	1 pkt
13.1	Zapisanie, że wrunkiem koniecznym ciągłości danej funkcji w punkcie $x = 2$ jest istnienie skończonej granicy w tym punkcie. Uzasadnienie, że dwumian $(x - 2)$ jest podzielnikiem dwumianu $(x^2 + a)$, zatem parametr a przyjmuje wartość: $a = -4$. (1 punkt przyznajemy za podanie odpowiedzi $a = -4$ bez uzasadnienia).	2 pkt
13.2	Obliczenie granicy danej funkcji w punkcie $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$.	1 pkt
13.3	Porównanie obliczonej granicy z wartością funkcji g w punkcie $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2) = b$ oraz zapisanie odpowiedzi: funkcja g jest ciągła w punkcie $x = 2$, gdy $a = -4$ oraz $b = 4$.	1 pkt
14.1	Zapisanie, że $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 2n + 4$.	2 pkt
14.2	Obliczenie n-tego wyrazu ciągu: $a_n = 2n + 2$.	1 pkt
14.3	Zapisanie różnicy dwóch dowolnych, kolejnych wyrazów tego ciągu: $r = a_{n+1} a_n$.	1 pkt
14.4	Obliczenie różnicy ciągu i stwierdzenie, żę jest to ciąg arytmetyczny.	1 pkt
15.1	Oznaczenie pierwszego wyrazy ciągu (np. przez a_1) oraz ilorazu (np. przez q) i zapisanie,że $a_1 \cdot q^9 = 10$.	1 pkt
15.2	Doprowadzenie iloczynu dziewiątnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{1+2+\ldots+18}$.	1 pkt
15.3	Przekształcenie iloczynu dziewiątnastu początkowych, kolejnych wyrazów	1 pkt

	danego ciągu do postaci $a_1^{19} \cdot q^{19 \cdot 9}$.	
15.4	Przekształcenie iloczynu dziewiątnastu początkowych, kolejnych wyrazów danego ciągu do postaci $\left(a_1 \cdot q^9\right)^{19}$.	1 pkt
15.5	Zapisanie odpowiedzi: iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu jest równy 10^{19}.	1 pkt

16.1	Zauważenie i zapisanie, że dane doświadczenie losowe można opisać schematem Bernoulliego, w którym prawdopodobieństwo sukcesu $p = \frac{1}{6}$, prawdopodobieństwo porażki $q = \frac{5}{6}$, liczba prób $N = 5$, liczba sukcesów $k \geq 4$.	1 pkt
16.2	Zapisanie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k \geq 4) = P_5(k = 4) + P_5(k = 5)$.	1 pkt
16.3	Wykorzystanie wzorów i zapisanie prowdopodobińtwa szukanego zdarzenia w postaci: $P_5(k \geq 4) = \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right) + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0$.	1 pkt
16.4	Poprawne obliczenie prawdopodobieństwa szukanego zdarzenia: $P_5(k \geq 4) = \left(\frac{25}{7776}\right) + \left(\frac{1}{7776}\right) = \left(\frac{26}{7776}\right) = \left(\frac{13}{3888}\right) \approx 0{,}00334$.	1 pkt

17.1	Zapisanie warunku $\vec{CB} \circ \vec{CB} = 0$, gdzie *C/I>(0,y).*	1 pkt
17.2	Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CA} = [-9, -2 - y]$.	1 pkt
17.3	Obliczenie współrzędnych wektora $\vec{CB} = [4, 2 - y]$.	1 pkt
17.4	Obliczenie iloczynu skalarnego wektorów $\vec{CA}$ i $\vec{CB}$: $-36 - (2 - y) \cdot (2 + y)$.	1 pkt
17.5	**17.5** Rozwiązanie równania (1) i zapisanie odpowiedzi: istnieją dwa takie punkty: $C\left(0, 2\sqrt{10}\right)$ lub $C\left(0, -2\sqrt{10}\right)$.	1 pkt

18.1	Sporządzenie rysunku i zaznaczenie na nim szukanego kąta.	1 pkt
18.2	Wykorzystanie twierdzenia cosinusów i zapisanie równania, np. $a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a^2 \cdot \cos\alpha$, gdzie *a* - długość krawędzi sześcianu, zaś α - miara kąta ostrego między przekątnymi sześcianu.	2 pkt
18.3	Obliczenie wartości cocinusa kąta ostrego: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.	1 pkt

	(Albo $\cos\beta = -\frac{1}{3}$ gdzie β jest kątem rozwartym).	

19.1	Wykorzystanie istnienia okręgu wpisanego w dany trapez i zapisanie, że suma długości podstaw *a* i *b* trapezu jest równa 10 cm.	2 pkt
19.2	Zauważenie i zapisanie, że wysokość trapezu, opuszczona z wierzchołka kąta rozwartego, dzieli dłuższąpodstawę na odcinki o długościac: $\frac{a+b}{2}$ oraz $\frac{a-b}{2}$.	1 pkt
19.3	Obliczenie długości wysokości trapez: $h = 4$ cm.	1 pkt
19.4	Obliczenie pola danego trapezu: $P = 20\ cm^2$.	1 pkt

20.1	Wyznaczenie warunków określających dziedzinę równania $h(x) - \log_2 k = 0$: $x > 5$ i $k > 0$.	2 pkt
20.2	Przekształcenie równania $h(x) - \log_2 k = 0$ do postaci: $\frac{x^2-4}{x-5} = k$.	1 pkt
20.3	Przekształcenie równania do postaci: $x^2 - kx + 5k - 4 = 0$.	1 pkt
20.4	Zapisanie warunków $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_w > 5 \\ f(5) > 0 \end{cases}$, gdzie x_w oznacza odciętą wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $f = x^2 - kx + 5k - 4$, przy pewnej wartości *k*.	1 pkt
20.5	Obliczenie wyróżnika trójmianu: $\Delta = k^2 - 20k + 16$.	1 pkt
20.6	Rozwiązanie nierówności: $\Delta > 0$: $\Delta > 0 \Leftrightarrow k \in \left(-\infty; 10 - 2\sqrt{21}\right) \cup \left(10 + 2\sqrt{21}; \infty\right)$.	1 pkt
20.7	Rozwiązanie nierówności $x_w > 5$: $k \in (10; \infty)$.	1 pkt
20.8	Sprawdzenie, że warunek $f(5) > 0$ zachodzi dla każdej rzeczywistej wartości parameru *k*.	1 pkt
20.9	Zapisanie odpowiedzi, uwzględniającej zbiór rozwiązań układu nirówności z p. 40 oraz warunku $k > 0$: dla wszystkich $k \in \left(10 + 2\sqrt{21}; \infty\right)$ równanie $h(x) - \log_2 k = 0$ ma dwa różne pierwiastki.	1 pkt

21.1	Zapisanie zależności między zmiennymi: $\frac{R}{H-R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$.	1 pkt
21.2	Wyznaczenie jednej zmiennej z powyższej zależności, np. $r^2 = \frac{16H}{H-8}$.	1 pkt
21.3	Wyznaczenie objętości stożka jako funkcji jednej zmienne: $V(H) = \frac{\pi}{3}\frac{16H^2}{H-8}$.	1 pkt

21.4	Wyznaczenie dziedziny funkcji *V*(*H*): $D_V = (8; \infty)$.	1 pkt
21.5	Obliczenie pochodnej funkcji objętości: $V'(H) = \frac{16\pi}{3} \frac{H(H-16)}{(H-8)^2}, D_{V'} = D_V$.	1 pkt
21.6	Wyznaczenie miejsca zerowego pochodnej funkcji objętości: *H* = 16.	1 pkt
21.7	Zbadanie znaku pochodnej funkcji objętości: $V'(H) > 0 \Leftrightarrow H \in (16; \infty)$ oraz $V'(H) < 0 \Leftrightarrow H \in (8;16)$.	1 pkt
21.8	Stwierdzenie i zapisanie, że dla *H*= 16 funkcja *V* osiąga lokalne minimum równe $V(16) = \frac{512\pi}{3}$	1 pkt
21.9	Uzasadnienie, że minimum lokalne funkcji objętości stożka jest wartością najmniejszą tej funkcji, np. poprzez powołanie się na dwa fakt: $\lim_{H \to 8^+} V(H) = +\infty$ oraz $\lim_{H \to 8} V(H) = +\infty$.	1 pkt
21.10	**10.** Podanie rozmiarów stożka o najmniejszej objętości opisanego na kuli o promieniu *R* = 4 cm: wysokość stożka, *H* =16 cm, promień podstawy stożka $r = 4\sqrt{2}$.	1 pkt