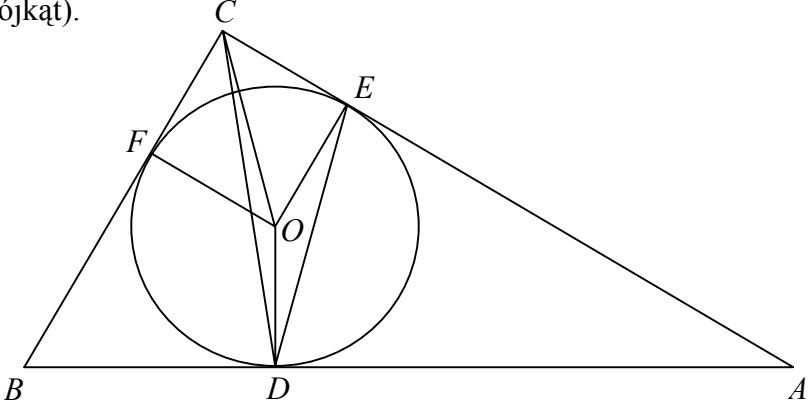


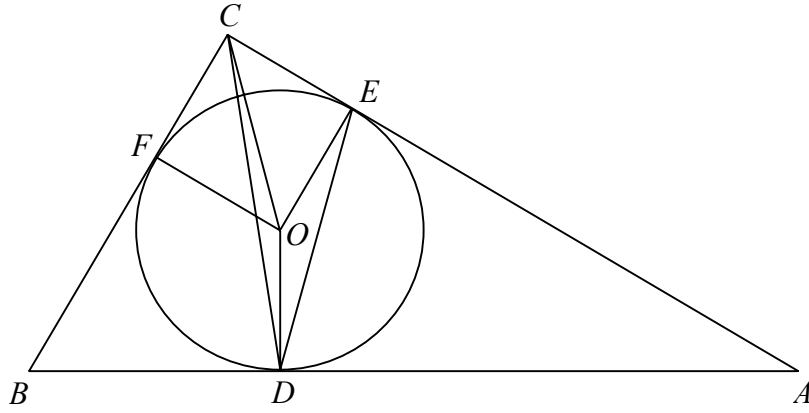
**OCENIANIE ARKUSZA  
POZIOM ROZSZERZONY**

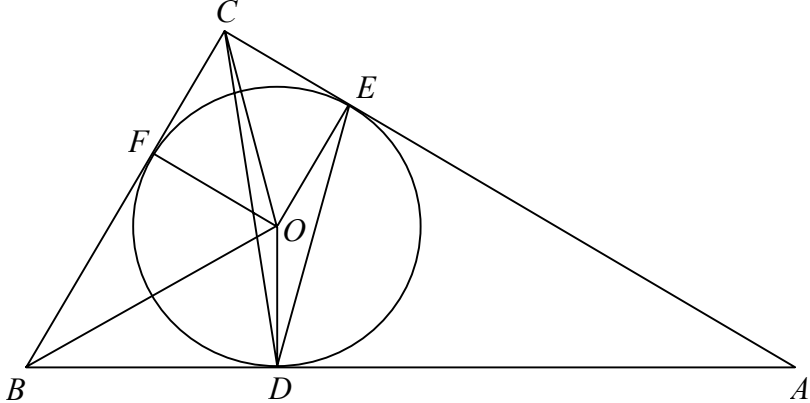
Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi dla sprawdzającego
1.	1.1 Przekształcenie wzoru funkcji do żądanej postaci $f(x) = 1 + \frac{-2}{x-1}$ lub $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$ .	1	
	1.2 <b>I sposób rozwiązania podpunktu b).</b> Zapisanie wzoru funkcji w postaci sumy $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$ .	2	1 pkt za wykonanie dzielenia $(px-3):(x-p) = p(x-p) + p^2-3$ lub wykorzystanie innej metody, która doprowadzi do zapisania wyrażenia w postaci sumy, np. $f(x) = \frac{p(x-p) + p^2-3}{x-p}$ . 1 pkt za zapisanie funkcji w postaci homograficznej: $f(x) = p + \frac{p^2-3}{x-p}$ .
	1.3 Zapisanie nierówności $p^2-3 > 0$ .	1	
	1.4 Rozwiązanie powyższej nierówności: $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .	1	
1.2	<b>II sposób rozwiązania podpunktu b)</b> Obliczenie pochodnej funkcji $f(x)$ : $f'(x) = \frac{3-p^2}{(x-p)^2}, x \neq p$ i zapisanie nierówności $\frac{3-p^2}{(x-p)^2} < 0$ pozwalającej wyznaczyć szukany zbiór wartości parametru $p$ .	2	1 pkt przyznajemy za obliczenie pochodnej, 1 pkt za zapisanie nierówności.

1.	1.3	Stwierdzenie, że $(x-p)^2 > 0$ i zapisanie nierówności $3-p^2 < 0$ .	1	
	1.4	Rozwiązanie nierówności $3-p^2 < 0$ : $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .	1	
	1.2	<b>III sposób rozwiązania punktu b) z zastosowaniem definicji funkcji malejącej.</b> Dla dowolnych $x_1, x_2 \in (p, \infty)$ takich, że $x_1 < x_2$ funkcja $f$ jest malejąca gdy $f(x_2) - f(x_1) < 0$ . Obliczenie różnicy $f(x_2) - f(x_1)$ : $f(x_2) - f(x_1) = \frac{p^2(x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2)}{(x_2 - p)(x_1 - p)} = \frac{(x_1 - x_2)(p^2 - 3)}{(x_2 - p)(x_1 - p)}$	2	1 pkt – zapisanie założeń. 1 pkt – doprowadzenie różnicy $f(x_2) - f(x_1)$ do postaci iloczynowej.
	1.3	Analiza znaku ułamka: $(x_2 - p) > 0$ , $(x_1 - p) > 0$ i $(x_1 - x_2) < 0$ dla każdego $x_1, x_2 \in (p, \infty)$ . Zapisanie nierówności $p^2 - 3 > 0$ .	1	Zauważenie, że wyrażenie $f(x_2) - f(x_1)$ przyjmuje wartość ujemną gdy $p^2 - 3 > 0$ .
	1.4	Rozwiązanie nierówności $p^2 - 3 > 0$ : $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .	1	
	1.2	<b>IV sposób rozwiązania punktu b)</b> Zapisanie warunku wystarczającego na to, żeby funkcja $f$ była malejąca w przedziale $(p, +\infty)$ : $f(p+1) > p$ .	2	
	1.3	Zapisanie warunku $f(p+1) > p$ w postaci: $\frac{p(p+1)-3}{(p+1)-p} > p$	1	
	1.4	Rozwiązanie nierówności $p^2 - 3 > 0$ : $p \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ .	1	

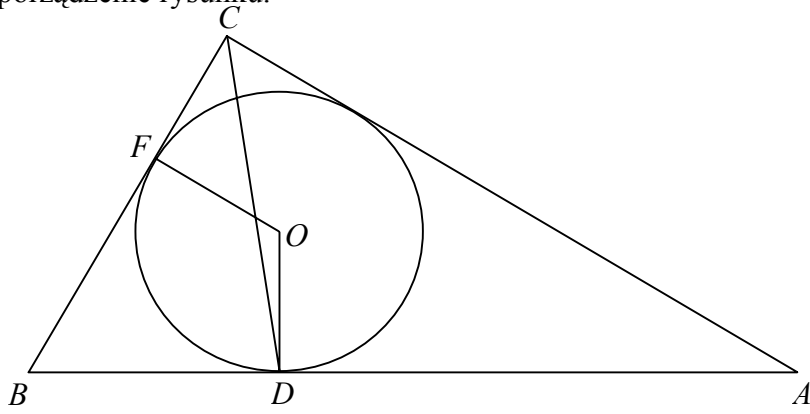
2.	2.1	Wyznaczenie pierwiastków trójmianu $y = x^2 - 8x + 12$ : $x_1 = 2, x_2 = 6$ .	1	
	2.2	Rozważenie możliwych przypadków ciągów geometrycznych, które mogą być rosnące: $(k, 2, 6), (2, k, 6), (2, 6, k)$	3	1 pkt za rozwiązanie każdego z przypadków.
	2.3	Wyznaczenie wszystkich wartości $k$ , dla których ciąg jest rosnący: $k = \frac{2}{3}$ lub $k = 2\sqrt{3}$ lub $k = 18$ .	1	Jeśli zdający nie odrzucił rozwiązania $k = -2\sqrt{3}$ , nie przyznajemy punktu.
3.	3.1	Zapisanie wzoru funkcji $f: f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ .	2	1 pkt za wykorzystanie definicji logarytmu i zapisanie równania $\log_p 4 = -2$ . 1 pkt za wyznaczenie podstawy logarytmu . Za bezpośrednie podanie wzoru funkcji przyznajemy 2 pkt.
	3.2	Rozwiązanie równania $(f(x))^2 - 16 = 0$ : $f(x) = 4$ lub $f(x) = -4$ z niewiadomą $f(x)$ .	1	Zdający może od razu zapisać alternatywę równań : $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$ lub $\log_{\frac{1}{2}} x = 4$ .
	3.3	Podanie rozwiązań równania $(f(x))^2 - 16 = 0$ z niewiadomą $x$ : $x = \frac{1}{16}$ lub $x = 16$ .	1	

4.	4.1	<p>Sporządzenie poprawnego rysunku, na którym, np.:  <math>D</math> oznacza punkt styczności okręgu z przeciwprostokątną,  <math>E, F</math> są punktami styczności przyprostokątnych <math>AC</math> i <math>BC</math> trójkąta z okręgiem.  (odcinek <math>CD</math> nie zawiera średnicy okręgu wpisanego w dany trójkąt).</p> 	1	Zdający otrzymuje punkt jeśli narysuje trójkąt z zaznaczonymi dobrymi kątami i wpisanym okręgiem.
	4.2	Wykorzystanie własności : środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów. $\triangle FBO$ jest prostokątny i $ \sphericalangle FBO  = 30^\circ$ . $ OF  = \sqrt{3}$ stąd $ OB  = 2\sqrt{3}$ .	1	
	4.3	Obliczenie długość odcinka $FB$ z $\triangle FBO$ : $ FB  = 3$ .	1	
	4.4	Obliczenie długość odcinka $CB$ : $ CB  =  CF  +  FB  = 3 + \sqrt{3}$ .	1	
	4.5	Obliczenie długość odcinka $DB$ : $ DB  =  BF  = 3$ . Z własności trójkąta opisanego na okręgu.	1	

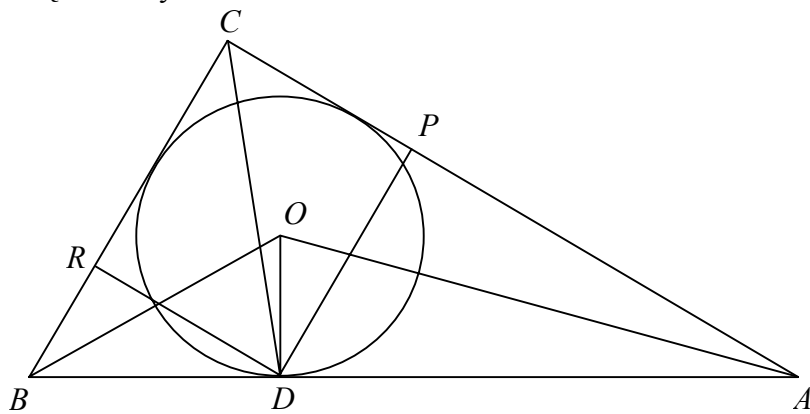
	4.6	<p>Zastosowanie wzoru cosinusów w <math>\triangle CBD</math> do obliczenia długości odcinka <math>CD</math>:</p> $ CD ^2 =  CB ^2 +  DB ^2 - 2 CB  \cdot  DB  \cos 60^\circ,$ $ CD ^2 = (3 + \sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \cdot (3 + \sqrt{3}) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 12 + 3\sqrt{3},$ $ CD  = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}.$	2	Jeżeli błąd jest spowodowany tym, że punkty $C$ , $O$ , $D$ są współliniowe i zdający korzysta z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $CBD$ , wtedy nie przyznajemy punktów.
4.	4.1	<p><b>II sposób rozwiązania.</b> Sporządzenie rysunku.</p> 	1	
	4.2	<p>Skorzystanie z tego, że <math> CE  =  CF  = r</math> (czworokąt <math>CFOE</math> jest kwadratem) oraz ze wzoru na długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt <math> CE  =  CF  = \frac{ AC  +  BC  -  AB }{2}</math>.</p> <p>Przyjęcie oznaczeń, np. <math>a =  BC </math> i zapisanie tej równości w postaci:</p> $\sqrt{3} = \frac{a + a\sqrt{3} - 2a}{2} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)}{2}.$	1	

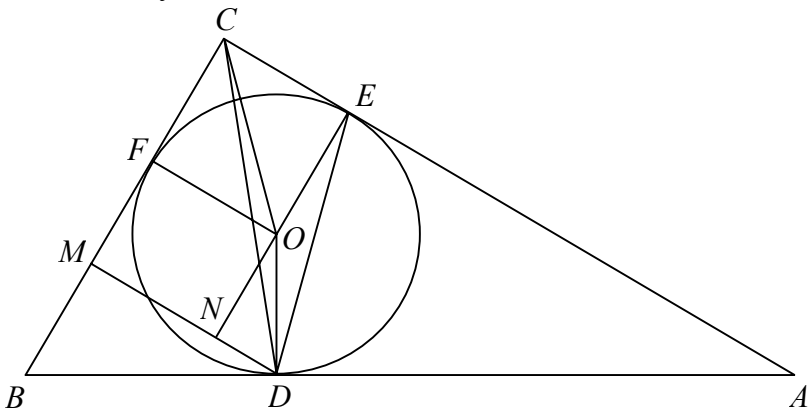
	4.3	Obliczenie $ BC  = a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 3 + \sqrt{3}$ .	1	
	4.4	Obliczenie $ AC  = 3\sqrt{3} + 3$ , np. z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych w trójkącie $ABC$ .	1	
	4.5	Obliczenie $ AE  =  AD  = 3 + 2\sqrt{3}$ .	1	
	4.6	Zastosowanie wzoru cosinusów w trójkącie $CDA$ i obliczenie długości $ CD $ : $ CD ^2 =  AC ^2 +  AD ^2 - 2 AC  \cdot  AD  \cdot \cos 30^\circ$ , $ CD ^2 = (3 + 3\sqrt{3})^2 + (3 + 2\sqrt{3})^2 - 2(3 + 3\sqrt{3})(3 + 2\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 3\sqrt{3}$ $ CD  = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ .	2	
4.	4.1	<b>III sposób rozwiązania</b> (z wykorzystaniem $\sphericalangle COD$ ). Sporządzenie rysunku. 	1	

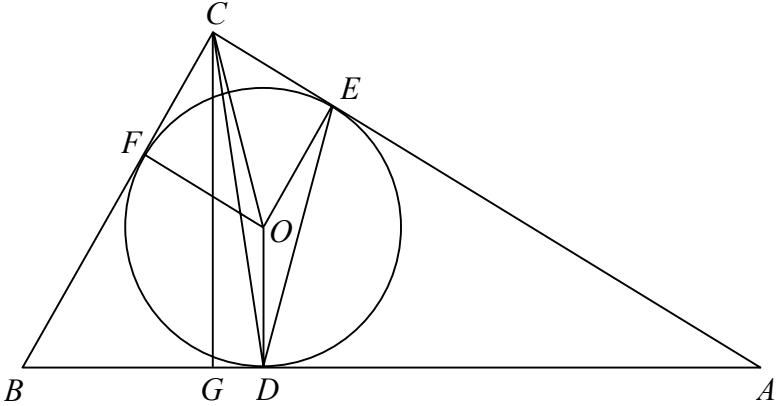
4.2	Obliczenie miary $\sphericalangle FOD$ : (wykorzystanie miary kątów czworokąta $FODB$ ) $ \sphericalangle FOD  + 2 \cdot 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ , $ \sphericalangle FOD  = 120^\circ$ .	1	
4.3	Zauważenie, że $ \sphericalangle FOC  = 45^\circ$ i obliczenie $ \sphericalangle COD  = 45^\circ + 120^\circ = 165^\circ$ .	1	
4.4	Obliczenie długości odcinka $OC$ . ( $OC$ przekątna kwadratu o boku długości $\sqrt{3}$ ). $ OC  = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$ .	1	
4.5	Wykorzystanie wzoru redukcyjnego: $\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ$ .	1	
4.6	Zastosowanie wzoru cosinusów w $\triangle COD$ : $ CD ^2 =  OC ^2 +  OD ^2 - 2 \cdot  OC  \cdot  OD  \cos 165^\circ$ . Obliczenie długości odcinka $CD$ : $ CD ^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 15^\circ$ , $ CD ^2 = 9 + 6\sqrt{2} \cos 15^\circ$ .	2	Zdający może pozostawić wynik w takiej postaci: $9 + 6\sqrt{2} \cos 15^\circ$ , lub odczytać wartość cosinusa z tablic i podać wynik liczbowy.

	4.1	<p><b>IV sposób rozwiązania.</b> Sporządzenie rysunku.</p> 	1	
4.	4.2	<p>Oznaczmy <math> AB  = a</math>. Z własności trójkąta <math>ABC</math> wynika, że</p> $ BC  = \frac{a}{2},  AC  = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$	1	
	4.3	<p>Wyznaczenie pola trójkąta <math>ABC</math> (z zastosowaniem wzoru: <math>S = pr</math>, gdzie <math>p = \frac{1}{2}(a + b + c)</math> i <math>r</math> jest promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt):</p> $\frac{\sqrt{3}}{2} \left( a + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{ AC  \cdot  BC }{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}.$	1	
	4.4	<p>Wyznaczenie <math> AB  = a</math> z powyższej równości:</p> $4a \left( \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = a^2,  AB  = a = 6 + 2\sqrt{3}.$	1	
	4.5	<p>Wyznaczenie długości odcinka <math>BD</math>:</p> $ BD  =  BF  = \frac{a}{2} -  CF  = 3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3.$	1	



	4.6	Zastosowanie wzoru cosinusów w trójkącie $CBD$ do wyznaczenia długości odcinka $CD$ : $ CD ^2 =  CB ^2 +  BD ^2 - 2 CB  \cdot  BD  \cos 60^\circ$ .	2	
4.	4.1	<b>V sposób rozwiązania.</b> Sporządzenie rysunku. 	1	
	4.2	Wykorzystanie własności : środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów. Wyznaczenie $ AD $ z trójkąta $AOD$ : $\frac{ OD }{ AD } = \frac{\sqrt{3}}{ AD } = \text{tg}15^\circ$ stąd $ AD  = \frac{\sqrt{3}}{\text{tg}15^\circ}$ .	1	
	4.3	Wyznaczenie $ BD $ z trójkąta $BOD$ : $\frac{ DO }{ BD } = \frac{\sqrt{3}}{ BD } = \text{tg}30^\circ$ stąd $ BD  = 3$ .	1	
	4.4	$ PD  = \frac{1}{2} AD  = \frac{\sqrt{3}}{2\text{tg}15^\circ}$ (z trójkąta prostokątnego $PDA$ , w którym $ \sphericalangle PDA  = 60^\circ$ ).	1	

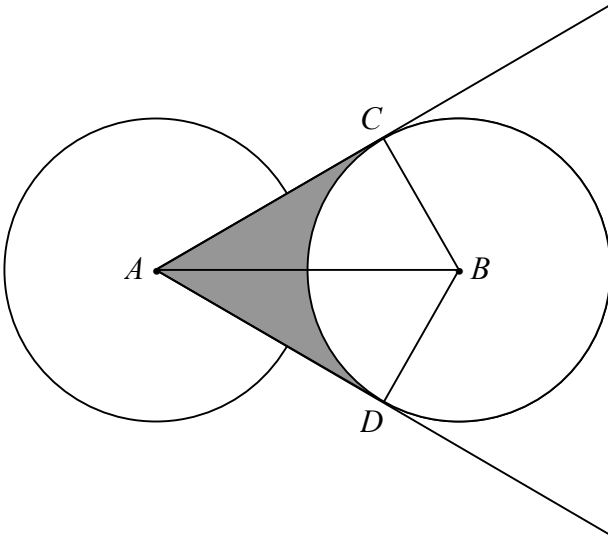
	4.5	$ DR  = \frac{ BD  \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (z trójkąta prostokątnego $BDR$ , w którym $ \sphericalangle DBR  = 60^\circ$ ).	1	
	4.6	Wyznaczenie długości odcinka $CD$ z trójkąta prostokątnego $CDR$ : $ CD  = \sqrt{ RD ^2 +  RC ^2} = \sqrt{\frac{3}{4\text{tg}^2 15^\circ} + \frac{27}{4}}$ .	2	
4.	4.1	<b>VI sposób rozwiązania.</b> Sporządzenie rysunku. 	1	
	4.2	Obliczenie miary kąta $DON$ : $ \sphericalangle DON  = 30^\circ$ .	1	
	4.3	Wyznaczenia $ DN $ z trójkąta prostokątnego $OND$ : $\frac{ DN }{ OD } = \sin 30^\circ$ , $ DN  = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $ ON  = \frac{1}{2} OD  \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$ .	1	
	4.4	$ CM  =  CF  +  FM  = \sqrt{3} +  ON  = \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ .	1	

	4.5	$ DM  =  DN  +  MN  = \frac{\sqrt{3}}{2} +  OF  = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .	1	
	4.6	Wyznaczenie $ CD $ z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie $CMD$ : $ CD ^2 =  CM ^2 +  DM ^2 = \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 + 3\sqrt{3}$ , $ CD  = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ .	2	
4.	4.1	<b>VII sposób rozwiązania.</b> Sporządzenie rysunku. 	1	Zdający otrzymuje punkt jeśli narysuje trójkąt z zaznaczonymi dobrymi kątami i wpisanym okręgiem.
	4.2	Wykorzystanie własności : środek okręgu wpisanego w trójkąt leży w punkcie przecięcia dwusiecznych jego kątów. $\Delta FBO$ (lub $\Delta BDO$ ) jest prostokątny i $ \sphericalangle FBO  = 30^\circ$ . $ OF  = \sqrt{3}$ stąd $ OB  = 2\sqrt{3}$ .	1	
	4.3	Obliczenie długości odcinków $FB$ z $\Delta FBO$ i $BD$ z $\Delta BDO$ : $ FB  = 3$ i $ BD  = 3$ .	1	
	4.4	Obliczenie długość odcinka $CB$ : $ CB  =  CF  +  FB  = 3 + \sqrt{3}$ .	1	

	4.5	Obliczenie długości odcinków $BG$ i $CG$ i $DG$ : $ BG  = \frac{1}{2} BC  = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ , $ CG  = \frac{\sqrt{3}}{2} BC  = \frac{3+3\sqrt{3}}{2}$ , $ GD  =  BD  -  BG  = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ .	1	
	4.6	Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa $\triangle BGC$ do obliczenie długości odcinka $CD$ : $ CD ^2 =  CG ^2 +  GD ^2$ $ CD ^2 = \left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 12 + 3\sqrt{3}$ , $ CD  = \sqrt{12 + 3\sqrt{3}}$ .	2	
5.	5.1	Sporządzenie wykresu funkcji (skorzystanie z definicji wartości bezwzględnej i sporządzenie wykresu albo naszkicowanie wykresu funkcji $g(x) = 2x - x^2$ , a następnie naszkicowanie wykresu funkcji $f(x) = g( x )$ ).	2	Zdający może rozpatrzeć dwa przypadki i za każdy poprawnie rozwiązany otrzymuje 1 pkt. Jeśli jest prawidłowy rysunek to zdający otrzymuje 2 pkt. Przyznajemy 1 punkt jeśli, np. - rysunek jest prawidłowy tylko po jednej stronie osi $Oy$ , - gdy zdający nie wybrał tej części wykresu, która jest prawidłowa ( <i>pozostawił niepotrzebne części wykresu</i> ).
	5.2	Wskazanie każdego punktu, w którym istnieje ekstremum lokalne funkcji $f$ i określenie rodzaju ekstremum: minimum lokalne dla $x = 0$ , maksimum lokalne dla $x = -1$ oraz $x = 1$ .	1	
6.	6.1	Wyznaczenie współrzędnych punktu $D$ : $D = (0, 6)$ .	1	
	6.2	Wyznaczenie współrzędnych punktów $A$ i $B$ : $A = (-3, 0)$ , $B = (6, 0)$	1	
	6.3	Wyznaczenie długości odcinka $CD$ : $ CD  = 3$ .	1	
	6.4	Obliczenie pola trapezu: $P_{ABCD} = \frac{9+3}{2} \cdot 6 = 36$ .	1	

7.	7.1	Wyznaczenie $\cos x$ z danego równania: $\cos x = 0$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$ .	1	Jeśli zdający podzieli równanie obustronnie przez $\cos x$ , bez komentarza dostaje 0 pkt.
	7.2	Wybranie i zapisanie rozwiązań należących do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$ : $x_1 = \frac{\pi}{3}$ , $x_2 = \frac{\pi}{2}$ , $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ , $x_4 = \frac{5}{3}\pi$ .	2	Jeśli zdający w 7.1 podzielił równanie przez $\cos x$ ale poprawnie rozwiązał otrzymane w ten sposób równanie otrzymuje 1 pkt. Zdający może podać odpowiedź w stopniach.
	7.1	<b>II sposób rozwiązania.</b> Rozwiązanie równania gdy $\cos x = 0$ : $x = \frac{\pi}{2}$ lub $x = \frac{3\pi}{2}$ .	1	
	7.2	Rozwiązanie równania gdy $\cos x \neq 0$ : 1 pkt - za doprowadzenie równania do najprostszej postaci $\cos x = \frac{1}{2}$ . 1 pkt – za rozwiązanie: $x = \frac{\pi}{3}$ lub $x = \frac{5\pi}{3}$ .	2	
8.	8.1	Zaznaczenie w przedziale $(2, 3)$ poprawnego znaku pochodnej: (+).	1	
	8.2	Zapisanie, że mimo poprawienia błędu w tej tabeli umieszczone w niej dane nie pozwalają stwierdzić dokładnie ile miejsc zerowych ma funkcja $f$ : mogą być 2, 3 albo 4 miejsca zerowe (zdający sporządza rysunki lub przedstawia słowne uzasadnienie).	3	1 pkt jeśli zdający poda odpowiedź – nie pozwala, 2 pkt jeśli poda odpowiedź – nie pozwala, bo może mieć 2 lub 3 lub 4 miejsca zerowe (poprawnie wskazuje dwie różne liczby miejsc zerowych, ale nie pokazuje, jak wygląda wykres funkcji). 3 pkt jeśli poda odpowiedź i narysuje dwa wykresy lub pokazuje, że np. w przedziale $(3, +\infty)$ funkcja może mieć 0 miejsc zerowych lub 1 miejsce zerowe.

9.	9.1	Obliczenie prawdopodobieństwa $P(A \cap B)$ : $P(A \cap B) = P(A) - P(A \setminus B) = 0,2$ . (1 pkt za pokazanie metody, 1 pkt za obliczenia)	2	
	9.2	Obliczenie iloczynu prawdopodobieństw $P(A) \cdot P(B)$ i zapisanie, że dane zdarzenia są niezależne: $P(A) \cdot P(B) = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2$ .	1	
10.	10.1	Obliczenie różnicy dwóch kolejnych wyrazów w postaci ogólnej: $a_{n+1} - a_n = 2 - p^2$ i stwierdzenie, że ciąg $(a_n)$ jest arytmetyczny.	1	
	10.2	Obliczenie żądanej sumy dwudziestu jeden wyrazów danego ciągu: $S_{40} - S_{19} = -1400 + 266 = -1134$ lub $\frac{a_{20} + a_{40}}{2} \cdot 21 = -1134$ .	2	1 pkt za przedstawienie metody, 1 pkt za wykonanie obliczeń.
	10.3	Zapisanie warunku na to aby ciąg $(b_n)$ był stały: $p^2 + p - 2 = 0$ .	1	
	10.4	Wyznaczenie wszystkich wartości $p$ , dla których ciąg $(b_n)$ jest stały: $p = 1$ lub $p = -2$ .	1	
11.	11.1	Wyznaczenie pierwiastków trójmianu kwadratowego: $n, 2n$ .	1	
	11.2	Wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ : $(n, 2n)$ .	1	
	11.3	Wyznaczenie największej liczby całkowitej spełniającej nierówność i zapisanie wzoru funkcji $f$ : $2n - 1$ , $f(n) = 2n - 1$ , dla $n > 1$ .	1	

12.	12.1		1	
		Zauważenie, że trójkąt $ABC$ jest prostokątny i kąt $ABC$ ma miarę $60^\circ$ .		
	12.2	Zapisanie pola zacieniowanej figury jako odpowiedniej różnicy pól: np. deltoidu $ADBC$ i wypukłego wycinka kołowego $DBC$ .	1	
	12.3	Obliczenie pola deltoidu $ADBC$ : $P_{ADBC} = 64\sqrt{3}$ .	1	
12.4	Obliczenie pola zacieniowanej figury: $P_f = 64\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$ .	1		

Za prawidłowe rozwiązanie każdego z zadań inną metodą od przedstawionej w schemacie przyznajemy maksymalną liczbę punktów.