Miejsce
na naklejkę
z kodem szkoły

*dysleksja* ☐

MMA-R1_1P-072

# EGZAMIN MATURALNY
# Z MATEMATYKI

## POZIOM ROZSZERZONY

**Czas pracy 180 minut**

**MAJ**
**ROK 2007**



**Instrukcja dla zdającego**

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.

***Życzymy powodzenia!***

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie
**50 punktów**

**Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy**

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

**PESEL ZDAJĄCEGO**

| | | |
|---|---|---|
| | | |

**KOD ZDAJĄCEGO**

**Zadanie 1.** ***(5 pkt)***

Dana jest funkcja $f(x) = |x-1| - |x+2|$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz zbiór wartości funkcji *f* dla $x \in (-\infty, -2)$.
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.
c) Podaj jej miejsca zerowe.
d) Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

a) Niech $x \in (-\infty, -2)$, wtedy:

$x - 1 < 0$, czyli $|x-1| = -(x-1)$ oraz

$x + 2 < 0$, czyli $|x+2| = -(x+2)$.

Zatem dla $x \in (-\infty, -2)$ otrzymuję:

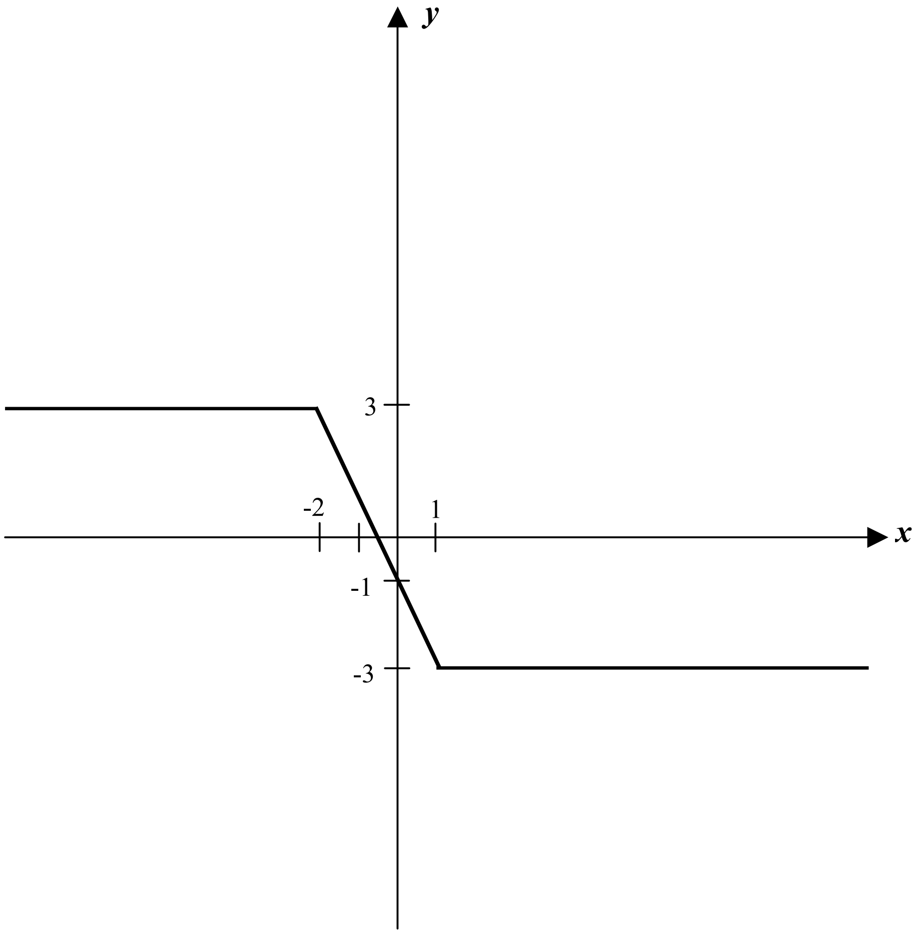
$f(x) = -(x-1) - (-(x+2)) = -x + 1 + x + 2 = 3$.

Funkcja *f* dla $x \in (-\infty, -2)$ jest funkcją stałą, a jej zbiorem wartości jest zbiór $\{3\}$.

b) Po zastosowaniu definicji wartości bezwzględnej funkcję *f* zapisuję w następującej postaci:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } x \in (-\infty, -2) \\ -2x - 1 & \text{dla } x \in \langle -2, 1) \\ -3 & \text{dla } x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$$

Szkicuję wykres funkcji *f*.




Funkcja ma jedno miejsce zerowe w przedziale $\left(-2,1\right)$ (co widać na sporządzonym wykresie).

Miejsce zerowe funkcji *f* wyznaczam, korzystając z jej wzoru w tym przedziale:

$-2x-1=0$, stąd $x_0=-\frac{1}{2}$.

c) Równanie $f\left(x\right)=m$ nie ma rozwiązań, gdy prosta o równaniu $y=m$ nie przecina wykresu funkcji *f*, czyli dla $m<-3$ lub $m>3$.

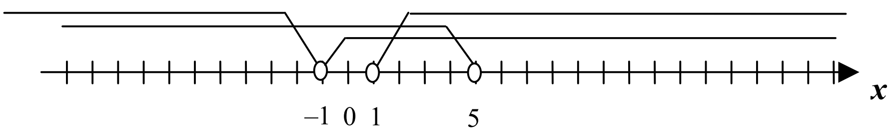
**Zadanie 2. (*5 pkt*)**

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(5-x\right)>\log_{\frac{1}{3}}\left(3\left(x+1\right)\right)$.

Wyznaczam dziedzinę nierówności logarytmicznej:

$x^2-1>0 \ \wedge\ 5-x>0 \ \wedge\ x+1>0$.

Rozwiązania tych nierówności zaznaczam na osi liczbowej:




Dziedziną danej nierówności jest przedział $\left(1,5\right)$.

Korzystam ze wzoru na sumę logarytmów i otrzymuję nierówność równoważną:

$\log_{\frac{1}{3}}\left[\left(x^2-1\right)\left(5-x\right)\right]>\log_{\frac{1}{3}}\left(3\left(x+1\right)\right)$.

Funkcja logarytmiczna przy podstawie $\frac{1}{3}$ jest malejąca, więc po opuszczeniu logarytmów i zmianie zwrotu nierówności otrzymuję nierówność równoważną:

$\left(x^2-1\right)\left(5-x\right)<3\left(x+1\right)$.

Przedstawiam ją w postaci iloczynowej:

$\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(5-x\right)<3\left(x+1\right)$

$\left(x-1\right)\left(x+1\right)\left(5-x\right)-3\left(x+1\right)<0$

$\left(x+1\right)\left[\left(x-1\right)\left(5-x\right)-3\right]<0$

$\left(x+1\right)\left(-x^2+6x-8\right)<0$

$-\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-4\right)<0$

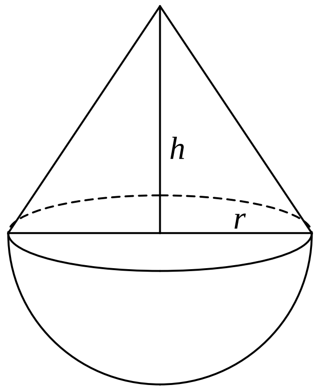
Rozwiązaniem nierówności jest suma przedziałów $\left(-1,\,2\right)\cup\left(4,\,\infty\right)$.

Rozwiązaniem nierówności logarytmicznej jest część wspólna otrzymanego zbioru i dziedziny: $\left(1,\,2\right)\cup\left(4,\,5\right)$.

**Zadanie 3. (*5 pkt*)**

Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

Sporządzam pomocniczy rysunek:




Zapisuję zależność miedzy długością promienia stożka i jego wysokością: $h = r + 1$.

Objętość $V$ kapsuły zapisuję jako sumę objętości stożka i półkuli:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (r+1) + \frac{2}{3}\pi r^3$ stąd $V = \pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2$.

Zależność między objętością $V_S$ stożka i objętością $V$ kapsuły wynikającą z treści zadania ma postać:

$$V_S = \frac{2}{3}V \text{, stąd}$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot (r+1) = \frac{2}{3}\left(\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2\right)$$

$$\frac{1}{3}\pi r^2 (r+1) = \frac{2}{3}\pi r^2 \left(r + \frac{1}{3}\right)$$

$$r + 1 = 2\left(r + \frac{1}{3}\right)$$

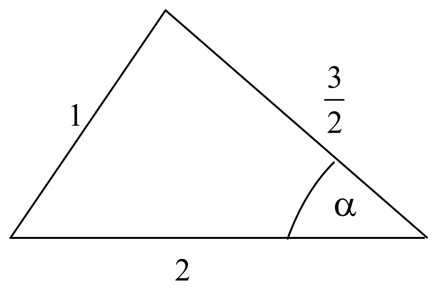
$$r = \frac{1}{3}.$$

Obliczam objętości $V$ kapsuły lądownika: $V = \frac{2\pi}{27}\,\mathrm{m}^3$.

## Zadanie 4. (*3 pkt*)

Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

Wykonuję rysunek pomocniczy, na którym zaznaczam poszukiwany kąt:




Wykorzystuję twierdzenie cosinusów do zapisania równania: $(1)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \cos\alpha$ i obliczam wartość cosinusa kąta $\alpha$:

$\cos\alpha = \frac{7}{8}$.

Wartość funkcji sinus kąta $\alpha$ wyznaczam z tożsamości trygonometrycznej $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\sin^2\alpha + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1$, $\sin^2\alpha = \frac{15}{64}$.

Kąt $\alpha$ jest kątem ostrym, więc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

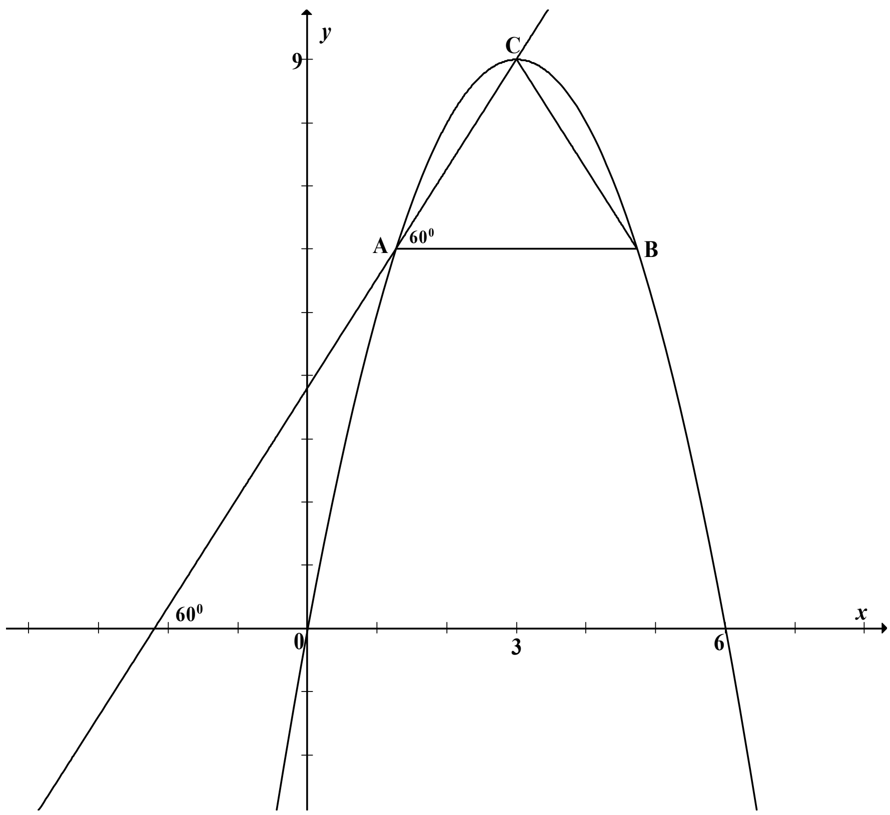
**Zadanie 5. (*7 pkt*)**

Wierzchołki trójkąta równobocznego *ABC* są punktami paraboli $y=-x^2+6x$. Punkt *C* jest jej wierzchołkiem, a bok *AB* jest równoległy do osi O*x*. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

Aby sporządzić rysunek wyznaczam współrzędne wierzchołka danej paraboli:

$y=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$, więc wierzchołek paraboli ma współrzędne $(3,9)$.

Wykonuję rysunek ilustrujący treść zadania:




Trójkąt *ABC* jest równoboczny, więc kąt *BAC* ma miarę $60^\circ$. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty *A* i *C* jest więc równy $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$.

Wyznaczam równanie prostej *AC*:

prosta $y=\sqrt{3}x+b$ przechodzi przez punkt $C=(3,9)$, więc współczynnik *b* jest równy $b=-3\sqrt{3}+9$.

Prosta *AC* ma równanie: $y=\sqrt{3}x\ -3\sqrt{3}+9$.

Aby wyznaczyć współrzędne punktu $A$ rozwiązuję układ równań:
$$\begin{cases} y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}+9 \\ y=-x^2+6x \end{cases}$$

Po dokonaniu podstawienia $y=-x^2+6x$ otrzymuję równanie $\sqrt{3}x-3\sqrt{3}+9=-x^2+6x$ , które po uporządkowaniu przyjmuje postać: $x^2+x\left(\sqrt{3}-6\right)+9-3\sqrt{3}=0.$

Rozwiązaniem równania są liczby: $x_1=3$, $x_2=3-\sqrt{3}$.

Współrzędne punktów przecięcia prostej $AC$ z parabolą $y=-x^2+6x$ są więc następujące: $\left(3-\sqrt{3},6\right)$ oraz $(3,9)$.

Punkt $(3,9)$ jest wierzchołkiem paraboli, więc punkt $A$ ma współrzędne $\left(3-\sqrt{3},6\right)$.

Współrzędne punktu $B$ wyznaczam wykorzystując fakt, iż osią symetrii paraboli $y=-x^2+6x$ jest prosta $x=3$. Punkt $B$ jest więc obrazem punktu $A$ w symetrii względem tej prostej, czyli $B=\left(3+\sqrt{3},6\right)$.

**Zadanie 6. (*4 pkt*)**

Niech $A$, $B$ będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A)=0,85$ i $P(B)=0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B)\geq 0,8$.

Ponieważ $P(A\cup B)\leq 1$ z własności prawdopodobieństwa, więc

$1\geq P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Stąd po przekształceniu otrzymuję:

$P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$

$P(A\cap B)\geq 0,85+0,75-1$

$P(A\cap B)\geq 0,6$

Korzystam z definicji prawdopodobieństwa warunkowego:

$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}\geq\dfrac{0,6}{0,75}$ i otrzymuję $P(A|B)\geq 0,8$.

**Zadanie 7. (*7 pkt*)**

Dany jest układ równań: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$.

Dla każdej wartości parametru $m$ wyznacz parę liczb $(x, y)$, która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$ dla każdego $m \in R$ jest para liczb

$$\begin{cases} x = \dfrac{3m}{m^2 + 1} \\ y = \dfrac{m^2 - 2}{m^2 + 1} \end{cases}.$$

Sumę $x + y$ zapisuję w postaci funkcji $f(m) = \dfrac{m^2 + 3m - 2}{m^2 + 1}$, $m \in R$.

Aby znaleźć najmniejszą wartość sumy w danym przedziale obliczam pochodną funkcji *f*: $f'(m) = \dfrac{-3m^2 + 6m + 3}{\left(m^2 + 1\right)^2}$, $m \in R$.

Obliczam miejsca zerowe pochodnej funkcji *f*:

$f'(m) = 0$ gdy $-3m^2 + 6m + 3 = 0$.

Rozwiązaniami równania są liczby: $m_1 = 1 - \sqrt{2}$, $m_2 = 1 + \sqrt{2}$, przy czym $m_1 \notin \langle 2, 4 \rangle$.

Badam znak pochodnej w przedziale $\langle 2, 4 \rangle$:

Ponieważ $f'(m) > 0$ dla $m \in \left(2, 1 + \sqrt{2}\right)$, więc funkcja *f* jest rosnąca w przedziale $\left\langle 2, 1 + \sqrt{2}\right)$. Ponieważ $f'(m) < 0$ dla $m \in \left(1 + \sqrt{2}, 4\right)$, więc funkcja *f* jest malejąca w przedziale $\left(1 + \sqrt{2}, 4\right\rangle$.

Stąd wnioskuję, że funkcja *f* przyjmuje najmniejszą wartość w jednym z końców przedziału $\langle 2, 4 \rangle$.

Obliczam wartość funkcji $f$ na końcach przedziału: $f(2)=\frac{8}{5}$ oraz $f(4)=\frac{26}{17}$ i porównuję otrzymane liczby.

Najmniejszą wartością sumy $x+y$ jest $f(4)=\frac{26}{17}$.

## Zadanie 8. *(3 pkt)*

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f\left(x\right)=\dfrac{\sin^2 x-\left|\sin x\right|}{\sin x}$ dla $x\in\left(0,\pi\right)\cup\left(\pi,2\pi\right)$.

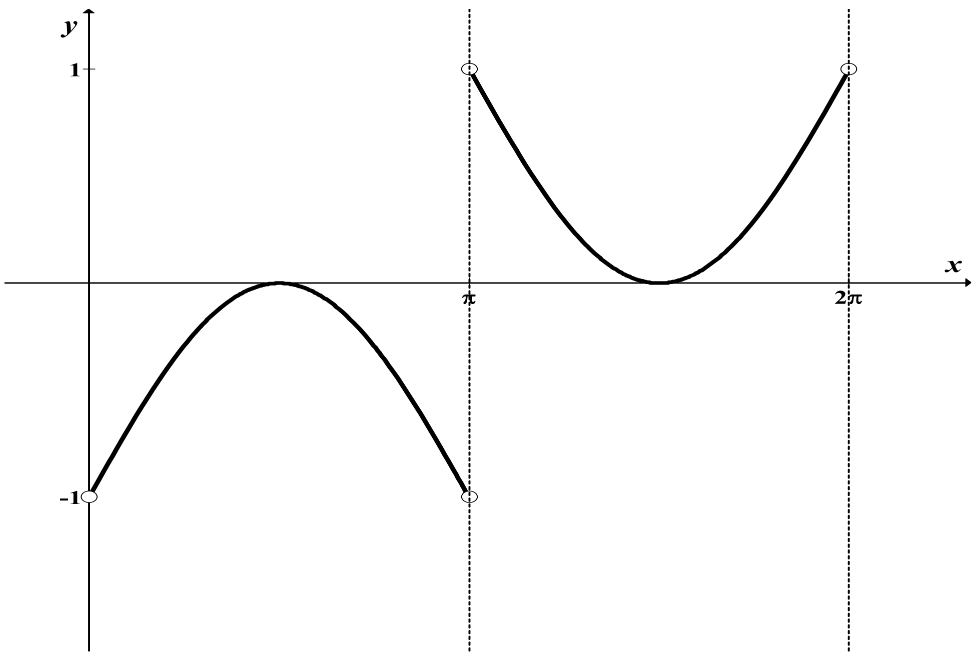
a) Naszkicuj wykres funkcji *f*.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji *f*.

Korzystam z definicji wartości bezwzględnej i zapisuję wzór funkcji $f$

w postaci: $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sin^2 x-\sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x>0\\[2ex] \dfrac{\sin^2 x+\sin x}{\sin x} & \text{dla } \sin x<0\end{cases}$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\sin x-1 & \text{dla } \sin x>0\\ \sin x+1 & \text{dla } \sin x<0\end{cases}.$$

Szkic wykresu funkcji w podanym zbiorze jest następujący:




Na podstawie wzoru wyznaczam miejsca zerowe funkcji:

$f\left(x\right)=0$ dla $x$ takich, że $\sin x-1=0$ lub $\sin x+1=0$ ,

czyli dla $x=\dfrac{\pi}{2}$, oraz $x=\dfrac{3\pi}{2}$.

## Zadanie 9. (*3 pkt*)

Przedstaw wielomian $W(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

Dany wielomian $W(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x-1$ przedstawiam w takiej postaci, aby można było zastosować wzory skróconego mnożenia: $W(x)=x^4-2x^3+x^2-4x^2+4x-1$.

Grupuję wyrazy i przedstawiam wyrażenie w postaci różnicy kwadratów dwóch wyrażeń: $W(x)=\left(x^2-x\right)^2-(2x-1)^2$.

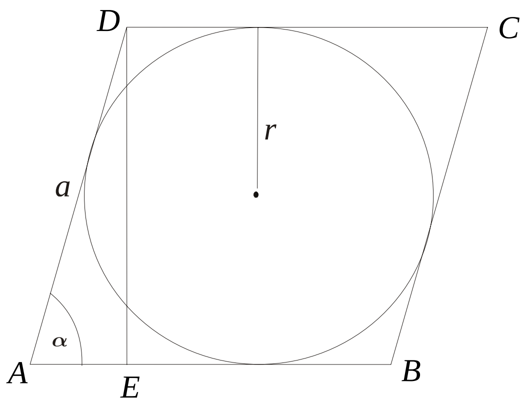
Wykorzystuję wzory skróconego mnożenia do rozkładu wielomianu na iloczyn dwóch wielomianów stopnia drugiego:

$$W(x)=\left(x^2-x\right)^2-(2x-1)^2=\left(x^2-x+2x-1\right)\cdot\left(x^2-x-2x+1\right)=$$
$$=\left(x^2+x-1\right)\cdot\left(x^2-3x+1\right).$$

**Zadanie 10. (*4 pkt*)**

Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola powierzchni rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

Sporządzam rysunek pomocniczy i wprowadzam następujące oznaczenia: $a$ – długość boku rombu, $r$ – promień koła wpisanego w romb, $P_K$ – pole koła wpisanego w romb, $P_R$ – pole rombu, $\alpha$ – kąt ostry rombu.




Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami $P_K = \pi r^2$, $P_R = a \cdot 2r$.

Z warunków zadania wynika proporcja: $\frac{P_K}{P_R} = \frac{\pi r^2}{a \cdot 2r} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$, stąd $\frac{r}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Z otrzymanej równości wyznaczam promień okręgu: $r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Z trójkąta prostokątnego $AED$ wyznaczam sinus kąta $\alpha$: $\sin\alpha = \frac{|DE|}{|AD|} = \frac{2r}{a}$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot a\frac{\sqrt{3}}{4}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem $\alpha = 60^\circ$.

**Zadanie 11.** ***(4 pkt)***

Suma $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $(a_n)$ wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

a) Wyznaczam wzór ogólny ciągu $(a_n)$, korzystając z własności sum częściowych ciągów: $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$a_n = 2n^2 + n - 2(n-1)^2 - n + 1 = 4n - 1.$$

Wyznaczam wartość wyrazu $a_2 = 7$ i różnicy ciągu ($a_2, a_4, ..., a_{100}$), $r = 8$.

Obliczam sumę $n = 50$ początkowych wyrazów ciągu o numerach parzystych: $S_{50} = \frac{2 \cdot 7 + (50-1) \cdot 8}{2} \cdot 50 = 10150$.

b) Obliczam granicę ciągu $\frac{S_n}{3n^2 - 2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 2} = \frac{2}{3}.$$

# BRUDNOPIS