



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

# **EGZAMIN MATURALNY 2013**

## **MATEMATYKA**

### **POZIOM ROZSZERZONY**

#### **Kryteria oceniania odpowiedzi**

**MAJ 2013**

**Zadanie 1. (0–4)**Rozwiąż nierówność  $|2x - 5| - |x + 4| \leq 2 - 2x$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie nierówności z wartością bezwzględną (IV.3.e.R)

**I sposób rozwiązania** (wyróżnienie na osi liczbowej przedziałów)Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały: A.  $(-\infty, -4)$ , B.  $\left(-4, \frac{5}{2}\right)$ , C.  $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

Rozwiązujemy nierówności w poszczególnych przedziałach i w każdym przedziale bierzemy część wspólną tego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności.

A. $x \in (-\infty, -4)$	B. $x \in \left(-4, \frac{5}{2}\right)$	C. $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$
$-2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x$ $x + 9 \leq 2$ $x \leq -7$	$-2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$ $-x + 1 \leq 2$ $x \geq -1$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $-1 \leq x < \frac{5}{2}$	$2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x$ $3x \leq 11$ $x \leq \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$ W tym przypadku rozwiązaniem nierówności jest $\frac{5}{2} \leq x \leq \frac{11}{3}$

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź:  $x \leq -7$  lub  $-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$ .Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest  $(-\infty, -7) \cup \left[-1, \frac{11}{3}\right]$ .**II sposób rozwiązania** (zapisanie czterech przypadków)

Zapisujemy cztery przypadki:

$$\text{I. } \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{IV. } \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 < 0 \end{cases}$$

W każdym z nich rozwiążemy nierówność bądź układ nierówności

$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ 2x - 5 - x - 4 \leq 2 - 2x \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq -4 \\ 3x \leq 11 \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x \geq -4 \\ x \leq 3\frac{2}{3} \\ \frac{5}{2} \leq x \leq 3\frac{2}{3} \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ x + 4 < 0 \\ 2x - 5 + x + 4 \leq 2 - 2x \\ x \geq \frac{5}{2} \\ x < -4 \\ 5x \leq 3 \\ \text{niemożliwe} \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 \geq 0 \\ -2x + 5 - x - 4 \leq 2 - 2x \\ x < \frac{5}{2} \\ x \geq -4 \\ x \geq -1 \\ -1 \leq x < \frac{5}{2} \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ x + 4 < 0 \\ -2x + 5 + x + 4 \leq 2 - 2x \\ x < \frac{5}{2} \\ x < -4 \\ x \leq -7 \\ x \leq -7 \end{cases}$
--	--	---	---

Łącząc otrzymane rozwiązania, podajemy ostateczną odpowiedź:  $x \leq -7$  lub  $-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$ .

### **Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający

- wyróżni na osi liczbowej przedziały  $(-\infty, -4)$ ,  $\left(-4, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$

albo

- zapisze cztery przypadki:

$$\text{I. } \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ x+4 < 0 \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \text{IV. } \begin{cases} 2x-5 < 0 \\ x+4 < 0 \end{cases}$$

### **Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błędy w wyznaczaniu przedziałów, to przyznajemy **0 punktów**. Podobnie **0 punktów** otrzymuje zdający, który błędnie zapisał cztery przypadki.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

- Zdający zapisze nierówności w poszczególnych przedziałach, np.:

A. dla  $x \in (-\infty, -4)$  mamy  $-2x+5+x+4 \leq 2-2x$ ,

B. dla  $x \in \left(-4, \frac{5}{2}\right)$  mamy  $-2x+5-x-4 \leq 2-2x$ ,

C. dla  $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$  mamy  $2x-5-x-4 \leq 2-2x$

albo

- zdający zapisze nierówności w poszczególnych przypadkach, np.:

I. gdy  $2x-5 \geq 0$  i  $x+4 \geq 0$ , to wtedy  $2x-5-x-4 \leq 2-2x$ ,

II. gdy  $2x-5 \geq 0$  i  $x+4 < 0$ , to wtedy  $2x-5+x+4 \leq 2-2x$  (lub stwierdzi, że ten przypadek jest niemożliwy),

III. gdy  $2x-5 < 0$  i  $x+4 \geq 0$ , to wtedy  $-2x+5-x-4 \leq 2-2x$ ,

IV. gdy  $2x-5 < 0$  i  $x+4 < 0$ , to wtedy  $-2x+5+x+4 \leq 2-2x$ .

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 3 pkt**

- zdający poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko dla dwóch przedziałów (spośród A., B., C.), popełni błąd w trzecim i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca

albo

- zdający rozpatrzy cztery przypadki, poprawnie rozwiąże nierówności i wyznaczy części wspólne otrzymanych wyników z poszczególnymi przedziałami tylko w dwóch przypadkach (spośród I., III., IV.), popełni błąd w trzecim przypadku oraz stwierdzi, że przypadek II. jest niemożliwy, i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in (-\infty, -7) \cup \left(-1, \frac{11}{3}\right)$ .

Uwaga:

We wszystkich rozważanych przypadkach zdający może rozpatrywać obie nierówności nieostre (przedziały obustronnie domknięte). Jeżeli natomiast rozważy wszystkie nierówności ostre (przedziały otwarte), to przyznajemy za całe zadanie o **1 punkt mniej**, niż gdyby wyróżnił wszystkie przedziały poprawnie.

**III sposób rozwiązania** (graficzne)

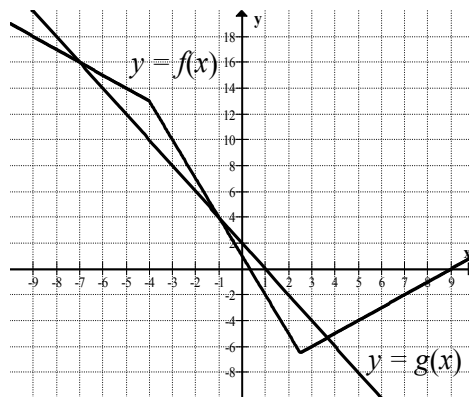
Rysujemy wykresy funkcji  $f(x) = |2x - 5| - |x + 4|$  i  $g(x) = -2x + 2$ .

Wyróżniamy na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -4)$ ,  $\left[-4, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

Zapisujemy wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach bez wartości bezwzględnej, np.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 9 & \text{dla } x \in (-\infty, -4) \\ -3x + 1 & \text{dla } x \in \left[-4, \frac{5}{2}\right) \\ x - 9 & \text{dla } x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty\right) \end{cases}$$

Rysujemy wykresy funkcji  $f$  i  $g$ :



Odczytujemy odcięte punktów przecięcia wykresów funkcji  $f$  i  $g$ :  $x = -7$ ,  $x = -1$ ,  $x = \frac{11}{3}$ , sprawdzamy, czy spełniają one równanie  $|2x - 5| - |x + 4| = 2 - 2x$ , a następnie podajemy te wszystkie argumenty, dla których  $f(x) \leq g(x)$ :  $x \in (-\infty, -7) \cup \left[-1, \frac{11}{3}\right)$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający wyróżni na osi liczbowej przedziały:  $(-\infty, -4)$ ,  $\left[-4, \frac{5}{2}\right)$ ,  $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze wzór funkcji  $f$  w poszczególnych przedziałach, np.:

A. dla  $x \in (-\infty, -4)$  mamy  $f(x) = -x + 9$ ,

B. dla  $x \in \left(-4, \frac{5}{2}\right)$  mamy  $f(x) = -3x + 1$ ,

C. dla  $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$  mamy  $f(x) = x - 9$ ,

lub

$$f(x) = \begin{cases} -x + 9 & \text{dla } x \in (-\infty, -4) \\ -3x + 1 & \text{dla } x \in \left(-4, \frac{5}{2}\right) \\ x - 9 & \text{dla } x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \end{cases}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający narysuje wykres funkcji  $f$  i prostą o równaniu  $y = -2x + 2$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze odpowiedź:  $x \in (-\infty, -7) \cup \left(-1, \frac{11}{3}\right)$ .

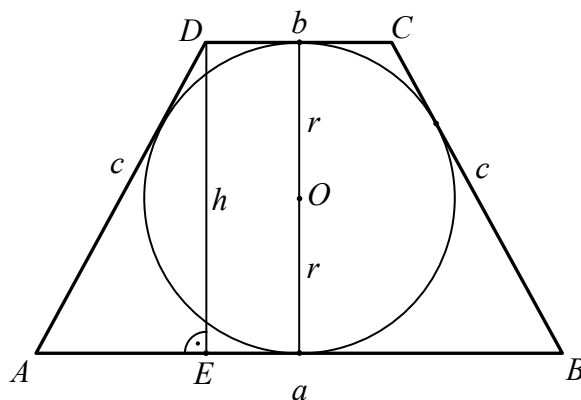
### Zadanie 2. (0–4)

Trapez równoramienny  $ABCD$  o podstawach  $AB$  i  $CD$  jest opisany na okręgu o promieniu  $r$ . Wykaż, że  $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (V.7.c)

#### I sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia:  $|AB| = a$ ,  $|CD| = b$ ,  $|AD| = c$ ,  $r$  – promień okręgu wpisanego w trapez,  $h$  – wysokość trapezu.



Ponieważ trapez jest równoramienny i opisany na okręgu, więc

$$|AE| = \frac{a-b}{2}, \quad h = 2r \quad \text{oraz} \quad a + b = 2c, \quad \text{czyli} \quad c = \frac{a+b}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AED$  otrzymujemy

$$c^2 = (2r)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \text{ skąd } 4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Podstawiając  $c = \frac{a+b}{2}$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} 4r^2 &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \\ 4r^2 &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}, \\ 4r^2 &= \frac{4ab}{4}, \\ 4r^2 &= ab. \end{aligned}$$

To kończy dowód.

### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający

- wyznaczy długość odcinka  $AE$ :  $|AE| = \frac{a-b}{2}$

albo

- wyznaczy długość ramienia trapezu:  $c = \frac{a+b}{2}$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka  $AE$  i długość ramienia trapezu:  $|AE| = \frac{a-b}{2}$ ,  $c = \frac{a+b}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

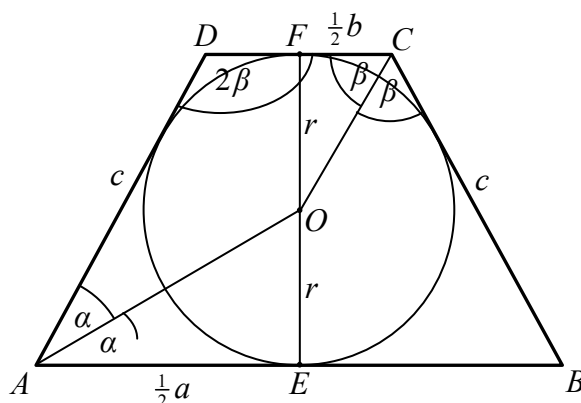
Zdający wykorzysta twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $AED$  i zapisanie:  $4r^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zdający wykaże tezę twierdzenia:  $4r^2 = ab$ .

## II sposób rozwiązania

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku



Ponieważ w trapez jest wpisany okrąg, więc środek tego okręgu znajduje się na przecięciu dwusiecznych kątów trapezu. Z własności kątów naprzemianległych i przyległych wynika, że  $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$ , czyli  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

Stąd

$$\beta = 90^\circ - \alpha.$$

Wnioskujemy stąd, że trójkąty prostokątne  $AEO$  i  $CFO$  są podobne. Zatem

$$\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|}, \text{ czyli } \frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r} \text{ (lub } \operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a}, \operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}).$$

Stąd  $r^2 = \frac{1}{4}ab$ , czyli  $4r^2 = ab$ .

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** .....

1 pkt

Zdający zapisze zależność  $\alpha + \beta = 90^\circ$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** .....

2 pkt

Zdający

- uzasadni, że trójkąty  $AEO$  i  $CFO$  są podobne i zapisze, że  $\frac{|OE|}{|AE|} = \frac{|FC|}{|FO|}$

albo

- wyznaczy  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{\frac{1}{2}a}$  oraz  $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{\frac{1}{2}b}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** .....

3 pkt

Zdający

- zapisze proporcję  $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$

albo

- wykorzysta równości  $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$  i zapisze  $\frac{r}{\frac{1}{2}b} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ .

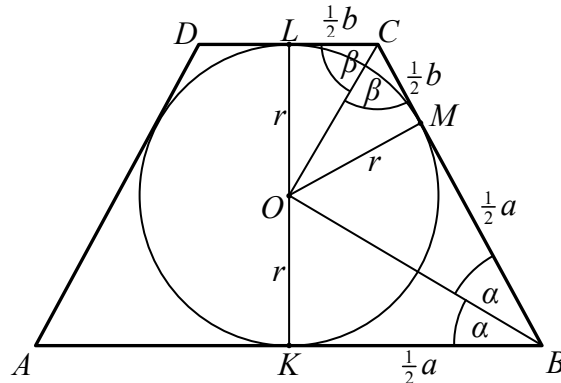
**Rozwiązanie pełne** .....

4 pkt

Zdający wykaże tezę twierdzenia:  $4r^2 = ab$ .

**III sposób rozwiązania**

Sporządzamy rysunek i wprowadzamy oznaczenia.



Z twierdzenia o odcinkach stycznych i własności trapezu równoramiennego wynika, że

$$|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a \text{ oraz } |CM| = |LC| = \frac{1}{2}b.$$

Ponieważ w trapez jest wpisany okrąg, więc środek okręgu znajduje się na przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trapezu. Z własności kątów trapezu:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ, \text{ czyli } \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Stąd wynika, że trójkąt  $BCO$  jest prostokątny. Wysokość  $OM$  tego trójkąta jest średnią geometryczną długości odcinków  $BM$  i  $CM$ , czyli

$$r^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b, \text{ czyli } 4r^2 = a \cdot b,$$

co kończy dowód.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- zapisze, że trójkąt  $BCO$  jest prostokątny albo

- zapisanie, że  $|BM| = |KB| = \frac{1}{2}a$  oraz  $|CM| = |LC| = \frac{1}{2}b$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**Zdający zapisze, że trójkąt  $BCO$  jest prostokątny oraz że  $|BM| = \frac{1}{2}a$  oraz  $|CM| = \frac{1}{2}b$ .**Uwaga**Jeżeli zdający zapisze np.  $|OM|^2 = |BM| \cdot |CM|$  i narysuje odcinek  $OM$  (lub zapisze, że jest to koniec promienia okręgu poprowadzonego do punktu styczności okręgu i ramienia trapezu), ale nie zapisze, że  $|BM| = \frac{1}{2}a$  lub  $|CM| = \frac{1}{2}b$  (nie wykorzystuje twierdzenia o równości odcinków stycznych), to otrzymuje **2 punkty**.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**



Zdający

- wykorzysta twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego opuszczonej na przeciwprostokątną, i zapisze, np. że  $|OM| = \sqrt{|BM| \cdot |CM|}$

albo

- wykorzysta podobieństwo trójkątów  $OMB$  i  $OMC$  i zapisze  $\frac{r}{\frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{2}b}{r}$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zdający wykaże tezę twierdzenia:  $4r^2 = ab$ .

### Zadanie 3. (0–3)

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R)

#### I sposób rozwiązania

Wybieramy z pięciu miejsc trzy miejsca, na których wstawiamy cyfrę 0, następnie wybieramy jedno z trzech miejsc dla cyfry 5, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

$$\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 30 \cdot 64 = 1920.$$

#### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 pkt

Zdający wybierze trzy miejsca z pięciu dla cyfry 0, wybierze jedno z trzech miejsc dla cyfry 5 i rozmieści na pozostałych dwóch miejscach cyfry różne od 0 i od 5.

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 pkt

Zdający obliczy, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.

#### Uwaga

Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

**II sposób rozwiązania**

Rozróżniamy dwa przypadki:

1. cyfra 5 znajduje się na pierwszym miejscu (jest cyfrą setek tysięcy)

albo

2. cyfra 5 nie znajduje się na pierwszym miejscu.

W pierwszym przypadku wybieramy trzy miejsca (spośród pięciu), na których umieszczamy cyfrę 0, a na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Takich liczb sześciocyfrowych jest  $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 = 640$ .

W drugim przypadku na pierwszym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (mamy 8 takich możliwości), następnie wybieramy miejsce w którym wstawimy cyfrę 5 (mamy 5 możliwości), a następnie z pozostałych czterech miejsc wybieramy trzy, w których wstawiamy cyfrę 0 (możemy to zrobić na 4 sposoby), na pozostałym miejscu umieszczamy cyfrę różną od 0 i różną od 5 (możemy to zrobić na 8 sposobów).

Zatem w tym przypadku mamy  $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 1280$  takich liczb.

Mamy więc  $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2 + 8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 640 + 1280 = 1920$  liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania.

**Uwaga**

W drugim przypadku możemy także przeprowadzić inne rozumowanie:

spośród miejsc od drugiego do szóstego wybieramy cztery, na których umieszczamy cyfrę 5 i trzy cyfry 0 (mamy  $5 \cdot 4$  takich możliwości), następnie na pozostałych dwóch miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5 (mamy  $8^2$  takich możliwości).

Tak więc w tym przypadku mamy  $5 \cdot 4 \cdot 8^2 = 1280$  takich liczb.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający

- zapisze, że jest  $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2$  liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy

albo

- zapisze, że jest  $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$  liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą nie jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że jest  $1 \cdot \binom{5}{3} \cdot 8^2$  liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą

jest 5, cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy oraz że jest  $8 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$  liczb sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą nie jest 5 i cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zdający zapisze, że jest 1920 liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i cyfra 5 występuje tylko raz.

Uwaga

Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

**III sposób rozwiązania**

Wybieramy cztery miejsca, na których wstawiamy cyfrę 5 i trzy cyfry 0, na pozostałych miejscach rozmieszczamy cyfry różne od 0 i różne od 5.

Jest  $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2 = 3840$  takich ciągów sześciocyfrowych.

Wśród nich znajdują się te, w których cyfra 0 znajduje się na pierwszym miejscu. Jest ich  $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 1920$ .

Stąd wynika, że liczb sześciocyfrowych spełniających warunki zadania jest  $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2 - \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2 = 3840 - 1920 = 1920$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**

Zdający

- zapisze liczbę ciągów sześciocyfrowych, w zapisie których tylko jeden raz występuje cyfra 5, a cyfra 0 pojawia się dokładnie trzy razy:  $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2$

albo

- zapisze liczbę ciągów sześciocyfrowych, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 0:  $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający zapisze, że jest  $\binom{6}{4} \cdot 4 \cdot 8^2$  ciągów sześciocyfrowych, w zapisie których tylko jeden

raz występuje cyfra 5, a cyfra 0 pojawia się dokładnie trzy razy, w tym  $\binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 8^2$  takich

ciągów, w zapisie których pierwszą cyfrą jest 0.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zdający obliczy, ile jest liczb sześciocyfrowych, w zapisie których cyfra 0 występuje dokładnie trzy razy i tylko raz występuje cyfra 5: 1920.

Uwaga

Jeżeli zdający uzyska wynik końcowy, ale traktuje to jak jeden z kilku przypadków, to otrzymuje za rozwiązanie co najwyżej **2 punkty**.

**Zadanie 4. (0–4)**Rozwiąż równanie  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$  dla  $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R)

**Rozwiązanie (I sposób)**Ponieważ  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ , więc równanie  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$  jest równoważne równaniu

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0,$$

czyli równaniu  $\cos x(2 \cos x + 1) = 0$ . To równanie jest równoważne alternatywie równań

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = -\frac{1}{2}.$$

W przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  równanie  $\cos x = 0$  ma dwa rozwiązania:  $x = \frac{\pi}{2}$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$ .Równanie  $\cos x = -\frac{1}{2}$  ma w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  dwa rozwiązania:  $x = \frac{2}{3}\pi$  lub  $x = \frac{4}{3}\pi$ .Zapisujemy odpowiedź: równanie  $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$  ma cztery rozwiązania:  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{2}{3}\pi$ ,  $x = \frac{4}{3}\pi$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**Zdający zapisze równanie w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej tego samego argumentu, np.  $2 \cos^2 x + \cos x = 0$  i na tym zakończy.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający

- zapisze alternatywę  $\cos x = 0$  lub  $\cos x = -\frac{1}{2}$

albo

- wprowadzi pomocniczą niewiadomą, np.  $t = \cos x$  i zapisze, że  $t = 0$  lub  $t = -\frac{1}{2}$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 3 pkt**

Zdający

- rozwiąże równanie  $\cos x = 0$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{\pi}{2}$  lub  $x = \frac{3}{2}\pi$

albo

- rozwiąże równanie  $\cos x = -\frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :  $x = \frac{2}{3}\pi$  lub  $x = \frac{4}{3}\pi$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... **4 pkt**

Zdający zapisze rozwiązania obu równań w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$\cos x = 0 \text{ dla } x = \frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi \text{ (albo } x = 90^\circ \text{ lub } x = 270^\circ),$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ dla } x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi \text{ (albo } x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ).$$

Uwagi

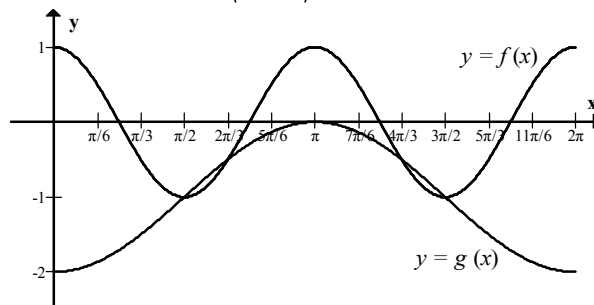
1. Nie wymagamy, aby zdający zapisał warunek np.  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ , o ile z rozwiązania wynika, że zdający uwzględnił ten warunek.
2. Jeżeli zdający podaje ogólne rozwiązanie równania trygonometrycznego:  $\cos x = 0$  dla  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą,  $\cos x = -\frac{1}{2}$  dla  $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą lub  $x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, to otrzymuje **3 punkty**.
3. Jeżeli zdający dzieli stronami równanie  $2\cos^2 x + \cos x = 0$  przez  $\cos x$  bez rozpatrzenia dwóch przypadków i poprawnie rozwiąże równanie  $2\cos x + 1 = 0$ , to otrzymuje za całe rozwiązanie **2 punkty**.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\cos 2x = -\cos x - 1.$$

Rozpatrujemy dwie funkcje  $f(x) = \cos 2x$  oraz  $g(x) = -\cos x - 1$  i rysujemy ich wykres (wystarczy ograniczyć się do przedziału  $\langle 0, 2\pi \rangle$ )



Odczytujemy rozwiązania równania:  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \frac{2\pi}{3}$ ,  $x = \frac{4\pi}{3}$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania** ..... **1 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np.  $\cos 2x = -\cos x - 1$ , wprowadzi dwie funkcje  $f(x) = \cos 2x$  oraz  $g(x) = -\cos x - 1$  i narysuje wykres jednej z tych funkcji.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... **2 pkt**

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np.  $\cos 2x = -\cos x - 1$ , wprowadzi dwie funkcje  $f(x) = \cos 2x$  oraz  $g(x) = -\cos x - 1$  i narysuje wykresy obu funkcji.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze rozwiązania obu równań w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$ :

$$\cos x = 0 \text{ dla } x = \frac{\pi}{2} \text{ lub } x = \frac{3}{2}\pi \text{ (albo } x = 90^\circ \text{ lub } x = 270^\circ),$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ dla } x = \frac{2}{3}\pi \text{ lub } x = \frac{4}{3}\pi \text{ (albo } x = 120^\circ \text{ lub } x = 240^\circ).$$

Uwaga

Jeżeli zdający poda poprawnie trzy spośród rozwiązań (błędnie odczyta czwarte rozwiązanie, to otrzymuje **3 punkty**, jeśli natomiast odczyta co najwyżej dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty**.

**Zadanie 5. (0–5)**

Ciąg liczbowy  $(a, b, c)$  jest arytmetyczny i  $a + b + c = 33$ , natomiast ciąg  $(a - 1, b + 5, c + 19)$  jest geometryczny. Oblicz  $a, b, c$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Wykorzystanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (III.5)

**I sposób rozwiązania**

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} a + b + c = 33 \\ a + c = 2b \\ (b + 5)^2 = (a - 1)(c + 19) \end{cases}$$

Podstawiamy do pierwszego równania, w miejsce  $a + c$  wyrażenie  $2b$  i otrzymujemy równanie  $3b = 33$ , skąd  $b = 11$ . Układ równań przyjmuje zatem postać:

$$\begin{cases} b = 11 \\ a + c = 22 \\ 16^2 = (a - 1)(c + 19) \end{cases}$$

Równania drugie i trzecie tworzą układ z dwiema niewiadomymi, który rozwiążemy, podstawiając wyrażenie  $22 - a$  w miejsce niewiadomej  $c$  w równaniu trzecim. Otrzymujemy zatem równanie kwadratowe z niewiadomą  $a$ :

$$a^2 - 42a + 297 = 0.$$

Zatem  $a = 33$  lub  $a = 9$ .

Jeżeli  $a = 33$ , to  $c = -11$  i oczywiście  $b = 11$ .

Otrzymujemy zatem ciąg arytmetyczny  $(33, 11, -11)$ , a po odpowiednich przekształceniach ciąg geometryczny  $(32, 16, 8)$ .

Jeżeli zaś  $a = 9$ , to  $c = 13$  i  $b = 11$ . Otrzymujemy teraz ciąg arytmetyczny  $(9, 11, 13)$ , a po wykonaniu odpowiednich przekształceń ciąg geometryczny  $(8, 16, 32)$ .

Szukanymi liczbami są zatem:  $a = 33, b = 11, c = -11$  lub  $a = 9, b = 11, c = 13$ .

### Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprawdzie niewielkie, ale konieczny do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zdający wykorzysta własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) i zapisze odpowiednie równanie, np.  $2b = a + c$  albo  $(b + 5)^2 = (a - 1)(c + 19)$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający wykorzysta własności obu ciągów (arytmetycznego i geometrycznego) i zapisze układ równań umożliwiając obliczenie liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , np.

$$\begin{cases} a + b + c = 33 \\ a + c = 2b \\ (b + 5)^2 = (a - 1)(c + 19) \end{cases}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający przekształci układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą  $a$  lub  $c$ , np.

$$a^2 - 42a + 297 = 0 \text{ lub } c^2 - 2c - 143 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)** ..... 4 pkt

Zdający

- poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb
- albo
- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane liczby:  $a = 33$ ,  $b = 11$ ,  $c = -11$  lub  $a = 9$ ,  $b = 11$ ,  $c = 13$ .

#### Uwagi

1. Jeżeli zdający stosuje własności ciągu arytmetycznego przy rozważaniu ciągu geometrycznego (lub odwrotnie), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający zapisze odpowiedź w postaci, z której nie można jednoznacznie stwierdzić, że są dwie trójki szukanych liczb, np. zapisze:  $a = 33$  lub  $a = 9$ ,  $b = 11$ ,  $c = -11$  lub  $c = 13$ , to otrzymuje **4 punkty**.

### II sposób rozwiązania

Oznaczamy: przez  $a$  – pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a przez  $r$  – różnicę tego ciągu. Wówczas  $b = a + r$ ,  $c = a + 2r$ . Z własności ciągu arytmetycznego i z treści zadania otrzymujemy równanie  $a + (a + r) + (a + 2r) = 33$  i stąd  $a + r = 11$ . Zatem ciąg arytmetyczny możemy zapisać następująco:  $(11 - r, 11, 11 + r)$ . Ciąg  $(a - 1, b + 5, c + 19)$ , a więc ciąg  $(10 - r, 16, 30 + r)$  jest geometryczny, więc możemy zapisać równanie, np.

$$16^2 = (10-r)(30+r).$$

Po przekształceniach i uporządkowaniu otrzymujemy równanie kwadratowe

$$r^2 + 20r - 44 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są:  $r = 2$  lub  $r = -22$ . Następnie obliczamy  $a, b, c$ .

$$\text{Szukane liczby to: } \begin{cases} a = 9 \\ b = 11 \\ c = 13 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a = 33 \\ b = 11 \\ c = -11 \end{cases}.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający wprowadzi oznaczenia:  $a$  - pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, a  $r$  - różnica tego ciągu oraz wykorzysta definicję ciągu arytmetycznego do zapisania odpowiedniego równania, np.

$$a + (a+r) + (a+2r) = 33 \text{ lub } a+r = 11$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający

- wykorzysta własności ciągu geometrycznego i zapisze układ równań, np.

$$\begin{cases} a+r = 11 \\ (a+r+5)^2 = (a-1)(a+2r+19) \end{cases}$$

albo

- zapisze wyrazy ciągu geometrycznego w zależności od  $r$ , np.  $(10-r, 16, 30+r)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający przekształci układ równań do równania z niewiadomą  $r$ , np.

$$(11-r+r+5)^2 = (11-r-1)(11-r+2r+19) \text{ lub } r^2 + 20r - 44 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt**

Zdający

- poprawnie rozwiąże równanie kwadratowe, odrzuci jedno z rozwiązań, np.  $r < 0$  i poprawnie wyznaczy drugą trójkę liczb

albo

- przekształci układ równań z jedną niewiadomą do równania kwadratowego z błędem rachunkowym, np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**



Zdający wyznaczy dwie trójki liczb:  $\begin{cases} a = 9 \\ b = 11 \\ c = 13 \end{cases}$  lub  $\begin{cases} a = 33 \\ b = 11 \\ c = -11 \end{cases}$ .

#### Uwagi

- Jeżeli zdający stosuje własności ciągu arytmetycznego przy rozważaniu ciągu geometrycznego (lub odwrotnie), to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
- Jeżeli zdający zapisze odpowiedź w postaci, z której nie można jednoznacznie stwierdzić, że są dwie trójki szukanych liczb, np. zapisze:  $a = 33$  lub  $a = 9$ ,  $b = 11$ ,  $c = -11$  lub  $c = 13$ , to otrzymuje **4 punkty**.

#### Zadanie 6. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $x^2 + 2(1-m)x + m^2 - m = 0$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste  $x_1, x_2$  spełniające warunek  $x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R)

#### Rozwiązanie

Zapisujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2 \end{cases}$$

Rozwiązujemy nierówność  $\Delta > 0$ , czyli  $[2(1-m)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m^2 - m) > 0$ ,

$$\begin{aligned} 4(m-1)^2 - 4m(m-1) &> 0, \\ -m+1 &> 0, \\ m &< 1, \\ m &\in (-\infty, 1). \end{aligned}$$

Nierówność  $x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$  zapisujemy w postaci równoważnej

$$x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Wykorzystując wzory Viete'a, otrzymujemy układ nierówności z niewiadomą  $m$ :

$$\frac{m^2 - m}{1} \leq 6m \quad \text{i} \quad 6m \leq \left(\frac{2(m-1)}{1}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 - m}{1},$$

czyli

$$\begin{aligned} m^2 - 7m \leq 0 \quad \text{i} \quad 6m \leq 4(m^2 - 2m + 1) - 2m^2 + 2m, \\ m(m-7) \leq 0 \quad \text{i} \quad m^2 - 6m + 2 \geq 0, \\ m \in \langle 0, 7 \rangle \quad \text{i} \quad m \in \left(-\infty, 3 - \sqrt{7}\right) \cup \left(3 + \sqrt{7}, +\infty\right), \\ m \in \langle 0, 3 - \sqrt{7} \rangle \cup \langle 3 + \sqrt{7}, 7 \rangle. \end{aligned}$$

Stąd i z poprzednio warunku otrzymujemy

$$m \in \langle 0, 3 - \sqrt{7} \rangle.$$

### **Schemat oceniania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy** z nich polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :  $m \in (-\infty, 1)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

#### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi** etap polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1 \cdot x_2 \leq 6m \leq x_1^2 + x_2^2$ . Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za rozwiązanie nierówności  $x_1 \cdot x_2 \leq 6m$ :  $m \in \langle 0, 7 \rangle$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

Za rozwiązanie nierówności  $6m \leq x_1^2 + x_2^2$  zdający otrzymuje 3 punkty. Przy czym w tej części:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia  $x_1^2 + x_2^2$  w postaci  $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ ,

**2 punkty** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności  $6m \leq x_1^2 + x_2^2$  w postaci nierówności z jedną niewiadomą, np.:  $6m \leq 4(m^2 - 2m + 1) - 2m^2 + 2m$ ,

**3 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności  $6m \leq x_1^2 + x_2^2$ :

$$m \in \langle -\infty, 3 - \sqrt{7} \rangle \cup \langle 3 + \sqrt{7}, +\infty \rangle.$$

**Trzeci** etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego.

**Rozwiązanie pełne (trzeci etap).....6 pkt**

Zdający wyznaczy część wspólną zbiorów rozwiązań nierówności i poda odpowiedź:

$$m \in \langle 0, 3 - \sqrt{7} \rangle.$$

#### Uwaga

W przypadku rozwiązania z usterkami, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II.

### **Zadanie 7. (0–4)**

Prosta o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$  przecina okrąg o środku  $S = (3, 12)$  w punktach  $A$  i  $B$ . Długość odcinka  $AB$  jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie równania okręgu (IV.8.e.g.c.R)

**I sposób rozwiązania**

Odległość środka  $S$  okręgu od prostej o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$  jest równa

$$\frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 12 - 36|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-75|}{5} = 15.$$

Jest to też długość odcinka  $SC$ , gdzie  $C$  jest środkiem cięciwy  $AB$ . Ponieważ  $|AB| = 40$ , więc

$$|AC| = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20.$$

Trójkąt  $ACS$  jest prostokątny, a jego przeciwprostokątną jest promień  $r$  okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy  $|AS|^2 = |AC|^2 + |SC|^2$ , czyli

$$r^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625.$$

Równanie okręgu ma więc postać

$$(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = 625.$$

**Uwaga**

Zdający może obliczyć odległość punktu  $S$  od prostej o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$  w inny sposób, np. wybrać na prostej dwa punkty (np.  $C = (12, 0)$  i  $D = (0, -9)$ ), obliczyć pole trójkąta  $CDS$  ( $P_{CDS} = \frac{225}{2}$ ), a stąd obliczyć szukaną odległość, czyli wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $S$ :  $h = 15$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy  $AB$  albo zapisze, że środek cięciwy  $AB$ , środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego, albo
- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:

$$(x - 3)^2 + (y - 12)^2 = r^2,$$

albo

- obliczy połowę długości cięciwy  $AB$ :  $\frac{1}{2}|AB| = 20$ ,

albo

- obliczy odległość punktu  $S$  od prostej  $AB$  i nie interpretuje jej błędnie (np. jako promień szukanego okręgu) i na tym zakończy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy odległość środka okręgu od prostej o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$ , np. wykorzystując wzór na odległość punktu od prostej, obliczając wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $S$  na bok zawarty w tej prostej

$$\frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 12 - 36|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 15 \text{ lub } \frac{2P_{CDS}}{|CD|} = 15,$$

gdzie  $C$  i  $D$  leżą na prostej o równaniu  $3x - 4y - 36 = 0$

oraz

- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy  $AB$   
lub
- zapisze, że środek cięciwy  $AB$ , środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego  
lub
- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:  
 $(x-3)^2 + (y-12)^2 = r^2$   
lub
- obliczy połowę długości cięciwy  $AB$ :  $\frac{1}{2}|AB| = 20$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zdający zapisze równanie wynikające z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ACS$ , gdzie  $C$  oznacza środek cięciwy  $AB$ :  $r^2 = 20^2 + 15^2$ .

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**

Zdający zapisze równanie okręgu:  $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$ .

**II sposób rozwiązania**

Prosta prostopadła do prostej o równaniu  $3x-4y-36=0$  przechodząca przez środek szukanego okręgu jest symetralną cięciwy  $AB$ . Jej równanie ma postać

$$\begin{aligned} 4(x-3) + 3(y-12) &= 0, \\ 4x + 3y - 48 &= 0. \end{aligned}$$

Środek  $D$  cięciwy  $AB$  jest punktem przecięcia tej prostej z prostą  $AB$ . Jego współrzędne obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 3x - 4y - 36 = 0 \\ 4x + 3y - 48 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 9 \\ 4x + 3(\frac{3}{4}x - 9) - 48 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = \frac{3}{4}x - 9 \\ \frac{25}{4}x - 75 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 12 \\ y = 0 \end{cases},$$

więc  $D = (12, 0)$ .

Punkty  $A$  i  $B$  leżą na okręgu o środku  $D$  i promieniu 20 i na prostej  $AB$ . Współrzędne punktów  $A$  i  $B$  obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (x-12)^2 + y^2 = 20^2 \\ 3x - 4y - 36 = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-12)^2 + y^2 = 20^2 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-12)^2 + (\frac{3}{4}x - 9)^2 = 20^2 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases} \\ &\begin{cases} (x-12)^2 + \frac{9}{16}(x-12)^2 = 400 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{25}{16}(x-12)^2 = 400 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{4}|x-12| = 20 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-12| = 16 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \vee x = 28 \\ y = \frac{3}{4}x - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -12 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 28 \\ y = 12 \end{cases}$$

Zatem  $A = (-4, -12)$ ,  $B = (28, 12)$ .

Promień szukanego okręgu jest równy  $r = |AS| = \sqrt{(-4-3)^2 + (-12-12)^2} = \sqrt{625} = 25$ .

Stąd wynika, że szukany okrąg ma równanie  $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 pkt**

Zdający

- wykona rysunek, na którym zaznaczy środek cięciwy  $AB$  albo zapisze, że środek cięciwy  $AB$ , środek okręgu i koniec cięciwy to wierzchołki trójkąta prostokątnego,

albo

- wykorzysta współrzędne środka okręgu i zapisze równanie okręgu w postaci:

$$(x-3)^2 + (y-12)^2 = r^2,$$

albo

- obliczy połowę długości cięciwy  $AB$ :  $\frac{1}{2}|AB| = 20$ ,

albo

- wyznaczy równanie symetralnej cięciwy  $AB$ :  $4(x-3) + 3(y-12) = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający obliczy współrzędne środka cięciwy  $AB$ :  $D = (12, 0)$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zdający obliczy współrzędne jednego z punktów  $A$  lub  $B$ :  $A = (-4, -12)$ ,  $B = (28, 12)$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający zapisze równanie okręgu:  $(x-3)^2 + (y-12)^2 = 625$ .

**Zadanie 8. (0–4)**

Reszta z dzielenia wielomianu  $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + m$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika  $m$  oraz pierwiastki tego wielomianu.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie twierdzenia o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ i twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu (II.2.b.c.R)

**Rozwiązanie**

Reszta z dzielenia wielomianu  $W$  przez dwumian  $x + 1$  jest równa  $W(-1)$ . Zatem

$$4(-1)^3 - 5(-1)^2 - 23(-1) + m = 20.$$

Stąd  $m = 6$ . Wielomian  $W$  ma zatem postać  $W(x) = 4x^3 - 5x^2 - 23x + 6$ .

Zauważmy, że  $W(3) = 4 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 23 \cdot 3 + 6 = 3 \cdot (36 - 15 - 23 + 2) = 0$ .

Zatem wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $x - 3$ . Wykonując to dzielenie, otrzymujemy

$$4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = (x - 3)(4x^2 + 7x - 2).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu  $4x^2 + 7x - 2$ :

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 81, \sqrt{\Delta} = 9,$$

$$x_1 = \frac{-7 - 9}{8} = -2, x_2 = \frac{-7 + 9}{8} = \frac{1}{4}.$$

W rezultacie wielomian  $W$  ma trzy pierwiastki:  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = 3$ .

**Uwaga**

Możemy też zauważyć, że pierwiastkiem wielomianu  $W$  jest liczba  $-2$ , gdyż

$$W(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 5 \cdot (-2)^2 - 23 \cdot (-2) + 6 = 2 \cdot (-16 - 10 + 23 + 3) = 0.$$

Zatem wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $x + 2$ . Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = (x + 2)(4x^2 - 13x + 3).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu  $4x^2 - 13x + 3$ :

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121, \sqrt{\Delta} = 11,$$

$$x_1 = \frac{13 - 11}{8} = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{13 + 11}{8} = 3.$$

W rezultacie wielomian  $W$  ma trzy pierwiastki:  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = 3$ .

**albo**

Możemy zauważyć, że liczba  $\frac{1}{4}$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W$ , gdyż

$$W\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 23 \cdot \frac{1}{4} + 6 = \frac{1}{16} - \frac{5}{16} - 5\frac{3}{4} + 6 = 0.$$

Zatem wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $x - \frac{1}{4}$ . Wykonując to dzielenie, otrzymujemy:

$$4x^3 - 5x^2 - 23x + 6 = \left(x - \frac{1}{4}\right)(4x^2 - 4x - 24).$$

Obliczamy pierwiastki trójmianu  $4x^2 - 4x - 24$ :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-24) = 16 + 16 \cdot 24 = 16 \cdot 25, \sqrt{\Delta} = 4 \cdot 5 = 20,$$

$$x_1 = \frac{4 - 20}{8} = -2, x_2 = \frac{4 + 20}{8} = 3.$$

W rezultacie wielomian  $W$  ma trzy pierwiastki:  $x = -2$ ,  $x = \frac{1}{4}$ ,  $x = 3$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający zapisze równanie z niewiadomą  $m$ , np.  $4 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - 23 \cdot (-1) + m = 20$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający obliczy wartość współczynnika  $m$ :  $m = 6$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający

- poda jeden z pierwiastków wielomianu, np.: 3, podzieli wielomian przez dwumian  $(x-3)$  i otrzyma iloraz  $4x^2 + 7x - 2$  lub poda pierwiastek  $(-2)$ , podzieli wielomian przez dwumian  $(x+2)$  i otrzyma iloraz  $4x^2 - 13x + 3$ ,

albo

- zapisze wielomian  $W$  w postaci iloczynowej, np.:  $W(x) = 4(x+2)(x-3)(x-a)$ .

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu  $W$ :  $-2$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $3$ .

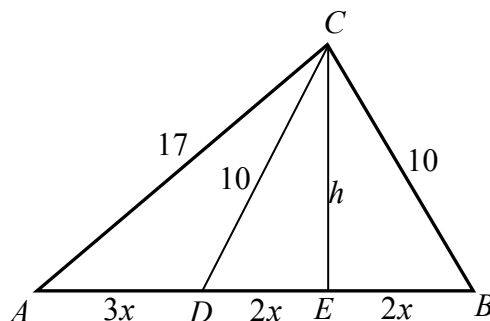
**Zadanie 9. (0–5)**

Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $|AC| = 17$  i  $|BC| = 10$ . Na boku  $AB$  leży punkt  $D$  taki, że  $|AD| : |DB| = 3 : 4$  oraz  $|DC| = 10$ . Oblicz pole trójkąta  $ABC$ .

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7)

**I sposób rozwiązania**

Poprowadźmy wysokość  $CE$  trójkąta  $ABC$



Niech  $|AD| = 3x$ , wtedy  $|DB| = 4x$ . Trójkąt  $DBC$  jest równoramienny, gdyż  $|BC| = |DC|$ , więc  $|DE| = |EB| = 2x$ . Stosując twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $BEC$  i  $AEC$ , otrzymujemy

$$(2x)^2 + h^2 = 10^2 \text{ oraz } (5x)^2 + h^2 = 17^2,$$

czyli

$$4x^2 + h^2 = 10^2 \text{ oraz } 25x^2 + h^2 = 17^2.$$

Stąd otrzymujemy

$$h^2 = 10^2 - 4x^2 \text{ oraz } 25x^2 + 10^2 - 4x^2 = 17^2.$$

Rozwiązujemy drugie z równań

$$21x^2 = 189,$$

$$x^2 = 9,$$

$$x = 3.$$

Zatem  $h = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ .

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84.$$

Uwaga

Po obliczeniu  $x$  mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

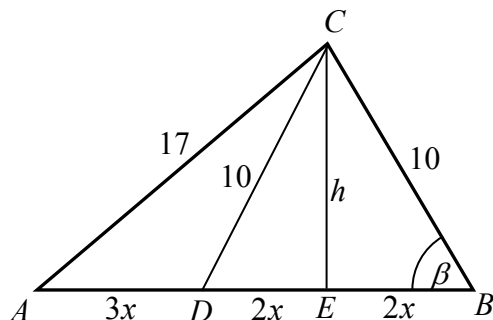
$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24, \quad p-a = 24-10=14, \quad p-b = 24-17=7, \quad p-c = 24-21=3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84.$$



## II sposób rozwiązania

Poprowadźmy wysokość  $CE$  trójkąta  $ABC$  i oznaczmy niech  $|\sphericalangle ABC| = \beta$ .



Niech  $|AD| = 3x$ , wtedy  $|DB| = 4x$ . Trójkąt  $DBC$  jest równoramienny, gdyż  $|BC| = |DC|$ , więc  $|DE| = |EB| = 2x$ . Z trójkąta prostokątnego  $EBC$  obliczamy

$$\cos \beta = \frac{2x}{10} = \frac{x}{5}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10 \cdot \cos \beta.$$

Zatem

$$289 = 49x^2 + 100 - 2 \cdot 7x \cdot 10 \cdot \frac{x}{5},$$

czyli

$$\begin{aligned} 189 &= 49x^2 - 28x^2, \\ 189 &= 21x^2, \\ x^2 &= 9, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Zatem  $h = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ .

Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

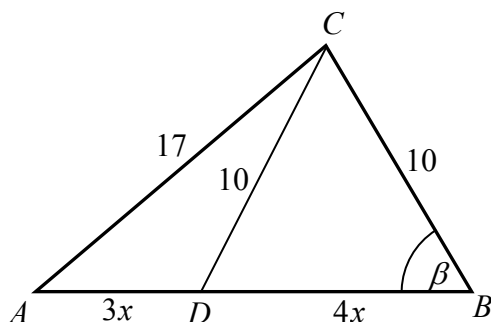
$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84.$$

### Uwaga

Po obliczeniu  $x$  mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10+17+21}{2} = 24, \quad p-a = 24-10=14, \quad p-b = 24-17=7, \quad p-c = 24-21=3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84.$$

**III sposób rozwiązania**Oznaczmy  $|\sphericalangle ABC| = \beta$ .

Niech  $|AD| = 3x$ , wtedy  $|DB| = 4x$ . Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów  $ABC$  i  $DBC$  otrzymujemy

$$17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10 \cdot \cos \beta \quad \text{oraz} \quad 10^2 = (4x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 4x \cdot 10 \cdot \cos \beta,$$

czyli

$$289 = 49x^2 + 100 - 140x \cdot \cos \beta \quad \text{oraz} \quad 100 = 16x^2 + 100 - 80x \cdot \cos \beta.$$

Z drugiego równania obliczamy

$$\cos \beta = \frac{16x^2}{80x} = \frac{x}{5}.$$

Stąd i z pierwszego równania dostajemy

$$189 = 49x^2 - 140x \cdot \frac{x}{5},$$

$$189 = 21x^2,$$

$$x^2 = 9,$$

$$x = 3.$$

Zatem  $h = \sqrt{10^2 - 4 \cdot 3^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ .Pole trójkąta  $ABC$  jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84.$$

**Uwaga**

Po obliczeniu  $x$  mamy już długości wszystkich boków trójkąta, więc jego pole możemy również obliczyć ze wzoru Herona. Wtedy mamy

$$p = \frac{10 + 17 + 21}{2} = 24, \quad p - a = 24 - 10 = 14, \quad p - b = 24 - 17 = 7, \quad p - c = 24 - 21 = 3.$$

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 84.$$

**Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 pkt

Zdający zapisze stosunek długości odcinków  $AD$  i  $DB$ , np.:  $|AD| = 3x$ ,  $|DB| = 4x$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć wprowadzoną niewiadomą, np.:

- $(2x)^2 + h^2 = 10^2$  oraz  $(5x)^2 + h^2 = 17^2$ ,

albo

- $\cos \beta = \frac{x}{5}$  oraz  $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10 \cdot \cos \beta$ ,

albo

- $17^2 = (7x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 7x \cdot 10 \cdot \cos \beta$  oraz  $10^2 = (4x)^2 + 10^2 - 2 \cdot 4x \cdot 10 \cdot \cos \beta$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający obliczy  $x$  albo  $h$ :  $x = 3$ ,  $h = 8$ .

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..... 4 pkt**

Zdający obliczy  $x$  oraz wysokość trójkąta z błędem rachunkowym i konsekwentnie do tego błędu obliczy pole trójkąta  $ABC$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 5 pkt**

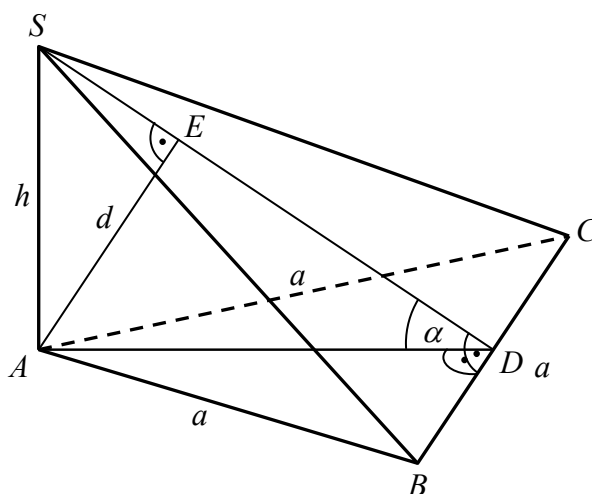
Zdający obliczy pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 84$ .

### Zadanie 10. (0–4)

W ostrosłupie  $ABCS$  podstawa  $ABC$  jest trójkątem równobocznym o boku długości  $a$ . Krawędź  $AS$  jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka  $A$  od ściany  $BCS$  jest równa  $d$ . Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczanie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.a.b)

### I sposób rozwiązania



Zaznaczamy na rysunku odcinek  $AE$ , długość tego odcinka jest odległością wierzchołka  $A$  od ściany  $BCS$  i jednocześnie wysokością trójkąta prostokątnego  $DAS$ , gdzie  $D$  jest środkiem krawędzi  $BC$  danego ostrosłupa. Zatem  $|AE| = d$ .

Ponadto w trójkącie  $DAS$  wprowadzamy oznaczenia:

$\alpha$  – miara kąta  $ADS$  i  $h = |AS|$  – wysokość ostrosłupa  $ABCS$ .

Z trójkątów prostokątnych  $DAS$  i  $AED$ , otrzymujemy  $\sin \alpha = \frac{|AS|}{|SD|} = \frac{|AE|}{|AD|}$ .

Ponieważ  $|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , to  $\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$ .

Przekształcamy równość  $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$  i wyznaczamy wysokość ostrosłupa  $h$ .

Otrzymujemy kolejno:

$$\frac{2h}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}} = \frac{2d}{a\sqrt{3}}$$

$$\frac{h^2}{4h^2 + 3a^2} = \frac{d^2}{3a^2}$$

$$h^2 = \frac{3a^2d^2}{3a^2 - 4d^2}$$

czyli

$$h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa  $ABCS$ :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

#### Uwaga

Równość  $\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$  możemy również otrzymać, korzystając z podobieństwa

trójkątów  $DAS$  i  $AED$ .

#### **Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości  $d$  prostopadły do płaszczyzny  $BCS$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze równość, z której można wyznaczyć  $h$  w zależności od  $a$  i  $d$ , np.:

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}a^2}} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

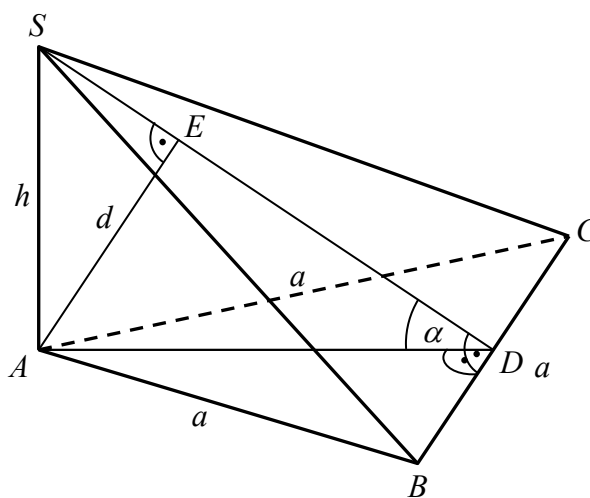
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający wyznaczy wysokość  $h$  ostrosłupa:  $h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający wyznaczy objętość  $V$  ostrosłupa:  $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$ .

**II sposób rozwiązania**



Zaznaczamy na rysunku odcinek  $AE$ , długość tego odcinka jest odległością wierzchołka  $A$  od ściany  $BSC$  i jednocześnie wysokością ostrosłupa  $ABCS$  o podstawie  $BSC$ .

Zatem objętość  $V$  ostrosłupa  $ABCS$  jest równa:  $V = \frac{1}{3} P_{BSC} \cdot d$ .

Obliczmy  $P_{BSC}$  pole trójkąta  $BSC$ :  $P_{BSC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot |SD|$ .

Wprowadzamy oznaczenie:  $\alpha$  – miara kąta  $ADS$  i z trójkątów prostokątnych  $DAS$  i  $AA'D$ , otrzymujemy:

$$\cos \alpha = \frac{|AD|}{|SD|} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{i} \quad \sin \alpha = \frac{|AE|}{|AD|} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Z jedynki trygonometrycznej obliczamy  $|SD|$ :

$$\left( \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|} \right)^2 + \left( \frac{\frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} \right)^2 = 1.$$

$$\frac{3a^2}{4|SD|^2} = 1 - \frac{4d^2}{3a^2}$$

$$\frac{3a^2}{4|SD|^2} = \frac{3a^2 - 4d^2}{3a^2}$$

$$|SD| = \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa  $ABCS$ :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}} \cdot d = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości  $d$  prostopadły do płaszczyzny  $BCS$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Zdający zapisze równość, z której można wyznaczyć długość odcinka  $SD$ , np.:

$$\left( \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{|SD|} \right)^2 + \left( \frac{\frac{d}{a\sqrt{3}}}{2} \right)^2 = 1.$$

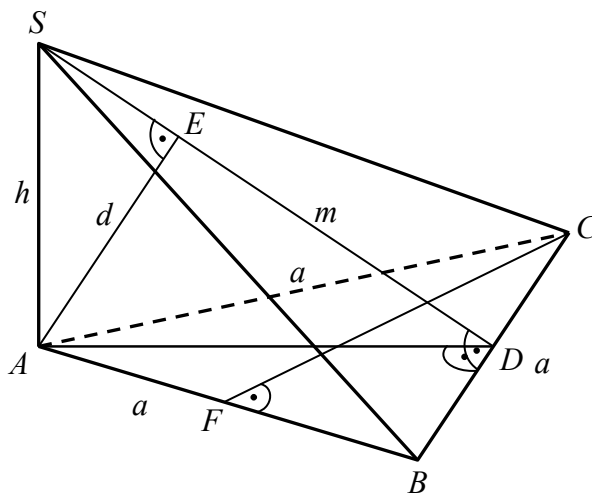
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Zdający wyznaczy długość odcinka  $SD$ :  $|SD| = \frac{3a^2}{2\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}$ .

**III sposób rozwiązania**



Płaszczyzny  $ABC$  i  $ABS$  są prostopadłe, trójkąt  $ABC$  jest równoboczny, więc jego wysokość  $|CF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  jest jednocześnie wysokością ostrosłupa opuszczoną na płaszczyznę podstawy  $ABS$ . Zatem

$$(1) \quad V = \frac{1}{3} P_{ABS} \cdot |CF| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ADS$  otrzymujemy

$$|DS|^2 = |AD|^2 + |AS|^2,$$

$$m^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2.$$

Stąd

$$m = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + h^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 4h^2}.$$

Odcinek  $AE$  jest wysokością ostrosłupa opuszczoną na podstawę  $BCS$ , więc

$$V = \frac{1}{3} P_{BCS} \cdot |DS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} am \cdot d,$$

$$(2) \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d.$$

Porównując prawe strony (1) i (2) otrzymujemy

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 4h^2} \cdot d.$$

Stąd

$$ah\sqrt{3} = d\sqrt{3a^2 + 4h^2},$$

$$3a^2h^2 = d^2(3a^2 + 4h^2),$$

$$3a^2h^2 = 3a^2d^2 + 4d^2h^2,$$

$$3a^2h^2 - 4d^2h^2 = 3a^2d^2,$$

$$h^2(3a^2 - 4d^2) = 3a^2d^2,$$

$$h^2 = \frac{3a^2 d^2}{3a^2 - 4d^2},$$

$$h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

Objętość ostrosłupa jest zatem równa

$$V = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}} = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$$

### **Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

Zdający zaznaczy na rysunku odcinek o długości  $d$  prostopadły do płaszczyzny  $BCS$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 pkt

Zdający zapisze równość (wynikającą z wyrażenia objętości ostrosłupa na dwa sposoby), z której można wyznaczyć  $h$  w zależności od  $a$  i  $d$ , np.:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot m}{2} \cdot d, \text{ gdzie } m = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 pkt

Zdający wyznaczy wysokość  $h$  ostrosłupa:  $h = \frac{ad\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 pkt

Zdający wyznaczy objętość ostrosłupa:  $V = \frac{a^3 d}{4\sqrt{3a^2 - 4d^2}}.$

### **Zadanie 11. (0–4)**

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (III.10.b.d)

### **Rozwiązanie**

Zdarzeniem elementarnym w tym doświadczeniu jest każdy ciąg czteroelementowy, którego wyrazami są liczby ze zbioru  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Jest to model klasyczny. Wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia jest  $6^4$ .



Zauważmy, że  $60 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ . Oznacza to, że należy rozpatrzeć trzy przypadki:

1. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru  $\{1, 2, 5, 6\}$ . Jest ich  $4! = 24$ .
2. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru  $\{1, 3, 4, 5\}$ . Jest ich  $4! = 24$ .
3. Ciągi, których wyrazami są liczby ze zbioru  $\{2, 3, 5\}$  i których dwa wyrazy są dwójkami. Jest ich  $4 \cdot 3 = 12$ .
4. Otrzymujemy zatem 60 ciągów. Prawdopodobieństwo tego zdarzenia jest więc równe  $\frac{60}{6^4} = \frac{5}{108}$ .

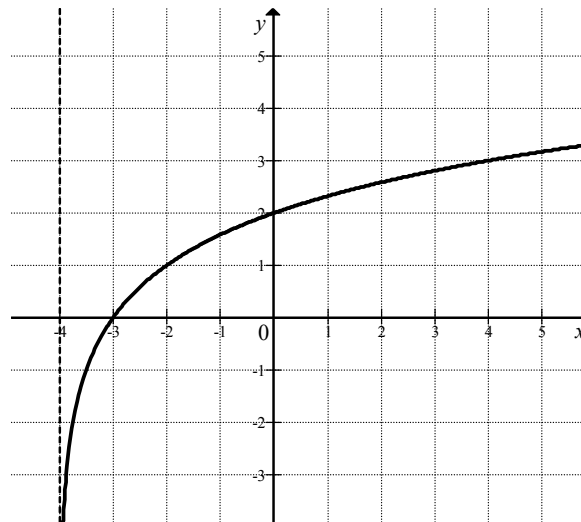
### Schemat oceniania

**Zasadnicze trudności tego zadania** polegają na zauważeniu trzech różnych sposobów otrzymania iloczynu równego 60 oraz zliczeniu, w każdym przypadku, liczby różnych czterowyrazowych ciągów. Za każdy rozpatrzony przypadek wraz z obliczoną poprawnie liczbę ciągów zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Czwarty punkt** przyznamy zdającemu, który zapisze, że prawdopodobieństwo opisanego w treści zadania zdarzenia jest równe  $\frac{|A|}{6^4}$ , gdzie  $|A|$  oznacza obliczoną przez zdającego liczbę ciągów.

### **Zadanie 12. (0–3)**

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarymicznej  $f$  określonej wzorem  $f(x) = \log_2(x - p)$ .

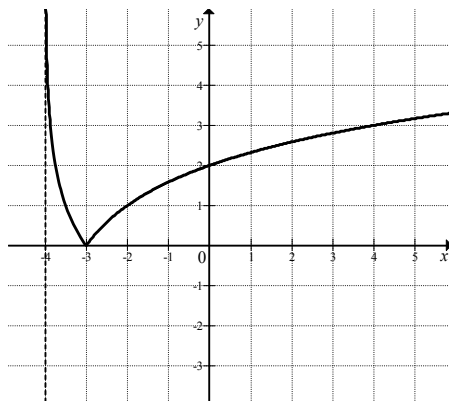


- a) Podaj wartość  $p$ .
- b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem  $y = |f(x)|$ .
- c) Podaj wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Sporządzanie wykresu funkcji $y =  f(x) $ na podstawie danego wykresu funkcji logarytmicznej $y = f(x)$ ; badanie liczby rozwiązań równania z parametrem (IV.4.a.d i 4.a.e.R)

**Rozwiązanie**

- a) Odczytujemy z wykresu, że  $p = -4$ . Możemy również zauważyć, że  $f(0) = 2$ . Stąd otrzymujemy  $\log_2(-p) = 2$ . Z definicji logarytmu mamy  $-p = 2^2 = 4$ . Stąd  $p = -4$ .
- b) Wykres funkcji określonej wzorem  $y = |f(x)|$  uzyskamy z wykresu funkcji  $f$ . W tym celu wystarczy tę część wykresu funkcji  $f$ , która leży pod osią  $Ox$ , odbić symetrycznie względem tej osi, a pozostałą część wykresu pozostawić bez zmian. W rezultacie otrzymujemy wykres



- c) Z wykresu odczytujemy, że równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków dla  $m > 2$ .

**Schemat oceniania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 pkt**  
Zdający

- zapisze, że  $p = -4$

albo

- narysuje wykres funkcji o wzorze  $y = |f(x)|$

albo

- poda wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

**Uwaga**

Jeżeli zdający ustala wartości parametru  $m$  na podstawie błędnie narysowanego wykresu funkcji  $y = |f(x)|$ , to nie otrzymuje punktu za wyznaczenie tych wartości.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 pkt**

Zdający

- zapisze, że  $p = -4$  i narysuje wykres funkcji o wzorze  $y = |f(x)|$  i nie poda wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków  
albo
- nie poda wartości  $p$ , narysuje wykres funkcji o wzorze  $y = |f(x)|$  i poda wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków  
albo
- zapisze, że  $p = -4$ , nie narysuje wykresu funkcji o wzorze  $y = |f(x)|$  i poda wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 pkt**

Zdający poda wartość  $p = -4$ , narysuje wykres funkcji o wzorze  $y = |f(x)|$  i poda wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie  $|f(x)| = m$  ma dwa rozwiązania przeciwnych znaków:  $m > 2$ .