



EGZAMIN MATURALNY W ROKU SZKOLNYM 2013/2014

MATEMATYKA POZIOM ROZSZERZONY

ROZWIĄZANIA ZADAŃ I SCHEMAT PUNKTOWANIA

MAJ 2014

Zadanie 1. (0–4)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{|x+3|+|x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacji geometrycznej. Sporządzanie wykresu, odczytywanie własności i rozwiązywanie zadań umieszczonych w kontekście praktycznym związanych z proporcjonalnością odwrotną. (II.1.f, 4.m)

Rozwiązanie

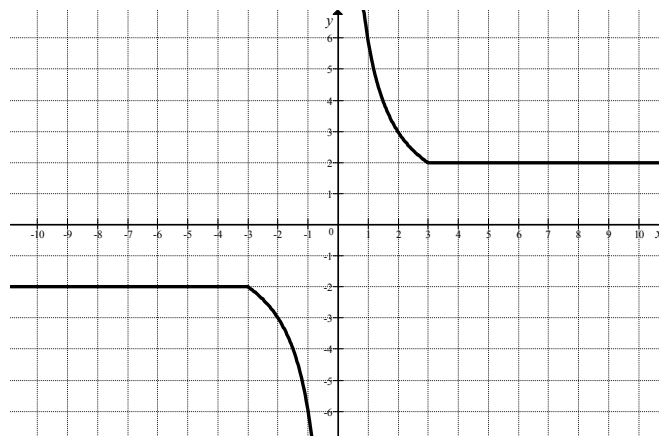
Wzór funkcji f możemy zapisać w każdym ze zbiorów: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3 \rangle \setminus \{0\}$, $\langle 3, +\infty)$ bez symbolu wartości bezwzględnej. Wówczas

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-(x+3) + [-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{x+3 + [-(x-3)]}{x} & \text{dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3), \\ \frac{x+3 + (x-3)}{x} & \text{dla } x \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$$

czyli

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \\ \frac{6}{x} & \text{dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3). \\ 2 & \text{dla } x \in \langle 3, +\infty) \end{cases}$$

Wykres ma więc postać



Zbiorem wartości funkcji f jest $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający:

- zapisze przedziały: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3 \rangle$, $\langle 3, +\infty \rangle$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej
- albo
- zaznaczy na osi liczbowej przedziały: $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3 \rangle$, $\langle 3, +\infty \rangle$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy, np. przy korzystaniu z definicji wartości bezwzględnej.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze licznik ułamka $\frac{|x+3|+|x-3|}{x}$ w przedziałach $(-\infty, -3)$, $\langle -3, 3 \rangle$, $\langle 3, +\infty \rangle$

bez użycia symbolu wartości bezwzględnej, np.:

$$|x+3|+|x-3| = -(x+3) + [-(x-3)] \text{ dla } x \in (-\infty, -3),$$

$$|x+3|+|x-3| = x+3 + [-(x-3)] \text{ dla } x \in \langle -3, 0 \rangle \cup (0, 3),$$

$$|x+3|+|x-3| = x+3 + x-3 \text{ dla } x \in \langle 3, +\infty \rangle.$$

Uwaga

Nie wymagamy, żeby zdający rozpatrując funkcję f w przedziale $\langle -3, 3 \rangle$ zapisał warunek $x \neq 0$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający

- zapisze wzór funkcji f w poszczególnych przedziałach popełniając błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu poda jej zbiór wartości

albo

- poprawnie narysuje wykres funkcji f i błędnie odczyta zbiór wartości (np. R).

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający poda zbiór wartości funkcji f : $(-\infty, -2) \cup \langle 2, +\infty \rangle$.

Uwaga

Jeżeli zdający narysuje poprawnie wykres funkcji i nie poda zbioru jej wartości, to otrzymuje **3 punkty**.

Zadanie 2. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja kwadratowa $f(x) = x^2 - (2m+2)x + 2m+5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A = (x_1, 0)$ i $B = (x_2, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa 6.

Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań (również umieszczonych w kontekście praktycznym), prowadzących do badania funkcji kwadratowej. Obliczanie odległości punktu od prostej. (IV.4.1, 8.c)

I sposób rozwiązania

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $\Delta > 0$. Zatem

$$\left[-(2m+2)\right]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+5) > 0,$$

$$4m^2 - 16 > 0,$$

$$4(m-2)(m+2) > 0,$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Odległość punktu $A = (x_1, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa

$$d_1 = \frac{|1 \cdot x_1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie odległość punktu $B = (x_2, 0)$ od tej prostej jest równa $d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}$.

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6.$$

Przekształcając równoważnie tę równość otrzymujemy

$$\frac{(x_1 + 1)^2}{2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{2} = 6,$$

$$x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 12,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 + x_2) - 10 = 0,$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 10 = 0.$$

Wykorzystując wzory Viete'a otrzymujemy równanie z niewiadomą m

$$(2m+2)^2 - 2(2m+5) + 2(2m+2) - 10 = 0,$$

$$4m^2 + 8m + 4 - 4m - 10 + 4m + 4 - 10 = 0,$$

$$4m^2 + 8m - 12 = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0,$$

$$(m-1)(m+3) = 0.$$

Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla $m = -3$ istnieją pierwiastki x_1, x_2 .

II sposób rozwiązania

Funkcja kwadratowa f ma dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $\Delta > 0$. Zatem

$$[-(2m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m+5) > 0,$$

$$4m^2 - 16 > 0,$$

$$4(m-2)(m+2) > 0,$$

$$m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Odległość punktu $A = (x_1, 0)$ od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ jest równa

$$d_1 = \frac{|1 \cdot x_1 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

Analogicznie odległość punktu $B = (x_2, 0)$ od tej prostej jest równa $d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}$.

Suma kwadratów tych odległości jest równa 6, więc otrzymujemy równość

$$\left(\frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6, \text{ czyli } \frac{(x_1 + 1)^2}{2} + \frac{(x_2 + 1)^2}{2} = 6.$$

Pierwiastki x_1, x_2 są równe:

$$x_1 = \frac{2m+2 - \sqrt{4m^2 - 16}}{2} = m+1 - \sqrt{m^2 - 4} \text{ oraz } x_2 = \frac{2m+2 + \sqrt{4m^2 - 16}}{2} = m+1 + \sqrt{m^2 - 4}.$$

Otrzymujemy więc równanie z niewiadomą m

$$\frac{(m+1 - \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} + \frac{(m+1 + \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} = 6,$$

$$(m+2 - \sqrt{m^2 - 4})^2 + (m+2 + \sqrt{m^2 - 4})^2 = 12,$$

$$(m+2)^2 - 2(m+2)\sqrt{m^2 - 4} + m^2 - 4 + (m+2)^2 + 2(m+2)\sqrt{m^2 - 4} + m^2 - 4 = 12,$$

$$2(m+2)^2 + 2m^2 - 8 = 12,$$

$$(m^2 + 4m + 4) + m^2 - 10 = 0,$$

$$m^2 + 2m - 3 = 0,$$

$$(m-1)(m+3) = 0.$$

Stąd

$$m = 1 \text{ lub } m = -3.$$

Tylko dla $m = -3$ istnieją pierwiastki x_1, x_2 .

Schemat oceniania I i II sposobu oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy z nich polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Uwaga Jeżeli zdający zapisze $\Delta \geq 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na rozwiązaniu równania $d_1^2 + d_2^2 = 6$.

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie odległości punktu A lub B od prostej o równaniu $x + y + 1 = 0$ w zależności od pierwszej współrzędnej punktu:

$$d_1 = \frac{|x_1 + 1|}{\sqrt{2}}, \quad d_2 = \frac{|x_2 + 1|}{\sqrt{2}}.$$

2 punkty zdający otrzymuje za zapisanie

• wyrażenia $d_1^2 + d_2^2$ w postaci: $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2)}{2}$

albo

• równości $d_1^2 + d_2^2 = 6$, w postaci równoważnej, np.:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) - 10 = 0$$

albo

• równania z niewiadomą m w postaci:

$$\frac{(m + 1 - \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} + \frac{(m + 1 + \sqrt{m^2 - 4} + 1)^2}{2} = 6.$$

3 punkty zdający otrzymuje za zapisanie równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą m , np.: $(2m + 2)^2 - 2(2m + 5) + 2(2m + 2) - 10 = 0$ lub

$$2(m + 2)^2 + 2m^2 - 8 = 12.$$

4 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie tego równania: $m = 1$ lub $m = -3$.

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego: $m = -3$.

Rozwiązanie pełne (trzeci etap).....6 pkt

Wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności i równania oraz podanie odpowiedzi: $m = -3$.

Uwaga

Za ostatni etap **1 punkt** może zostać przyznany tylko wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etapy I i II rozwiązania albo poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu równania z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże równanie z etapu II.

Zadanie 3. (0–1)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązywanie równań i nierówności trygonometrycznych. (II.6.e.R)

I sposób rozwiązania

Równanie zapisujemy w postaci równoważnej

$$\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1.$$

Dzieląc obie strony równania przez 2 otrzymujemy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ponieważ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$ oraz $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, więc równanie możemy zapisać w postaci

$$\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ze wzoru na sinus różnicy dostajemy

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{lub} \quad \frac{\pi}{3} - x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

czyli

$$x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi.$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ są tylko dwa rozwiązania tego równania: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Równanie $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2}$ możemy również zapisać w postaci równoważnej

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2},$$

a następnie zastosować wzór na cosinus sumy. Wtedy otrzymujemy

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Stąd

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ lub } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą,}$$

więc

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Uwaga

Do równania elementarnego, np. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ możemy również dojść nieco inaczej.

Zauważmy, że $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$, czyli $\sqrt{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$. Zatem równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$ możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x - \sin x = 1,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej, np.: $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin x = \frac{1}{2}$ lub

$$\cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \text{ lub } \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x - \sin x = 1.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ lub $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający rozwiąże równanie w zbiorze R :

$$x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, to otrzymuje 3 punkty.

II sposób rozwiązania

Ponieważ prawa strona równania $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ jest nieujemna, więc równanie ma rozwiązania tylko wtedy, gdy $\cos x \geq 0$. Wówczas podnosząc obie strony równania do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne

$$3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x.$$

Stąd i z „jedyńki trygonometrycznej” otrzymujemy

$$3(1 - \sin^2 x) = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x,$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 2 = 0,$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0.$$

Podstawiając $t = \sin x$ otrzymujemy równanie kwadratowe

$$2t^2 + t - 1 = 0,$$

$$(t+1)(2t-1) = 0.$$

Stąd

$$t = -1 \text{ lub } t = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$\sin x = -1 \text{ lub } \sin x = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem pierwszego z tych równań jest każda liczba $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Rozwiązaniem drugiego jest każda liczba $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Ponieważ dla każdego k jest liczbą całkowitą mamy $\cos\left(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\right) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) < 0$, więc

żadna z liczb $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ nie jest rozwiązaniem naszego równania. Spośród pozostałych

rozwiązań, w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ znajdują się tylko dwie takie liczby: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Zamiast przekształcać równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w sposób równoważny do układu równania $3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$ i nierówności $\cos x \geq 0$ możemy wyznaczyć wszystkie liczby z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, spełniające równanie $3 \cos^2 x = 1 + 2 \sin x + \sin^2 x$,

a więc liczby $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$, a następnie sprawdzić, które z nich spełniają

równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$. Wówczas dla $x = \frac{\pi}{6}$ lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}, \text{ a prawa } 1 + \sin \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ więc liczba } x = \frac{\pi}{6} \text{ jest rozwiązaniem}$$

równania $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$. Dla $x = \frac{5}{6}\pi$ lewa strona równania jest równa

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{5}{6}\pi = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}, \text{ a prawa } 1 + \sin \frac{5}{6}\pi = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \text{ więc liczba } x = \frac{5}{6}\pi \text{ nie jest}$$

rozwiązaniem równania $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$. Dla $x = \frac{3}{2}\pi$ lewa strona równania

$$\sqrt{3} \cdot \cos \frac{3}{2}\pi = \sqrt{3} \cdot 0 = 0, \text{ a prawa } 1 + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 - 1 = 0, \text{ więc liczba } x = \frac{3}{2}\pi \text{ jest}$$

rozwiązaniem równania.

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ znajdują się dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt

Zdający zapisze założenie $\cos x \geq 0$, a następnie zapisze równanie w postaci równoważnej, np.: $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający zapisze alternatywę równań: $\sin x = -1$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

Uwaga

Wystarczy, że zdający zapisze $t = -1$ lub $t = \frac{1}{2}$, jeśli wykonał podstawienie.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający rozwiąże równania $\sin x = -1$, $\sin x = \frac{1}{2}$ w zbiorze R :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań spośród $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$,

i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, to otrzymuje 3 punkty.

III sposób rozwiązania

Dopisując do równania $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1$ „jedynekę trygonometryczną” otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

z niewiadomymi $\sin x$ i $\cos x$.

Rozwiązując ten układ dostajemy kolejno:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ (\sqrt{3} \cdot \cos x - 1)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ 4 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ 4 \cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ \cos x = 0 \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Rozwiązując otrzymane równania elementarne mamy

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

Stąd

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ gdzie } k \text{ jest liczbą całkowitą.}$$

W przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ znajdują się dwa rozwiązania: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający zapisze układ równań, w którym jedno z równań zawiera tylko jedną niewiadomą $\cos x$ lub $\sin x$, np.:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{3} \cdot \cos x - 1 \\ (\sqrt{3} \cdot \cos x - 1)^2 + \cos^2 x = 1 \end{cases}$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający zapisze alternatywę elementarnych równań trygonometrycznych wynikających z otrzymanego układu, np.:

$$\cos x = 0 \text{ lub } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający rozwiąże otrzymane równania w zbiorze R :

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ lub $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie pełne **4 pkt**

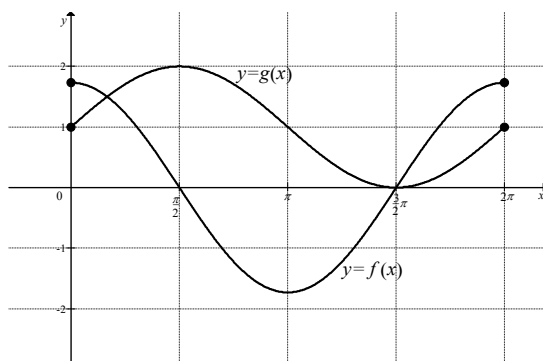
Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze tylko jedną serię rozwiązań równania elementarnego i konsekwentnie poda tylko jedno rozwiązanie z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$, to otrzymuje **3 punkty**.

IV sposób rozwiązania

Narysujmy w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = \sqrt{3} \cos x$ oraz $g(x) = \sin x + 1$ określonych w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.



W przedziale $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ funkcja f jest malejąca, a jej wartości maleją od $\sqrt{3}$ do 0, natomiast

funkcja g jest w tym przedziale rosnąca, a jej wartości rosną od 1 do 2. Zatem równanie

$f(x) = g(x)$ ma w tym przedziale jedno rozwiązanie. Rozwiązaniem tym jest $x = \frac{\pi}{6}$, gdyż

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ oraz $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. Drugim rozwiązaniem

równania $f(x) = g(x)$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ jest $x = \frac{3}{2}\pi$. Jest to wspólne miejsce zerowe funkcji f i g .

Zatem w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ znajdują się dwa rozwiązania równania: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania **1 pkt**

Zdający rozważy dwie funkcje: $f(x) = \sqrt{3} \cos x$ oraz $g(x) = \sin x + 1$ i narysuje wykres jednej z nich.

Uwaga

Zdający może rozważać funkcje określone na dowolnym zbiorze zawierającym przedział $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający rozważy dwie funkcje: $f(x) = \sqrt{3} \cos x$ oraz $g(x) = \sin x + 1$ i narysuje w jednym układzie współrzędnych wykresu obu tych funkcji.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający poda rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$, ale nie sprawdzi,

$$\text{że } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$$

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający poda wszystkie rozwiązania równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{3}{2}\pi$

i uzasadni, że są to wszystkie rozwiązania równania w tym przedziale, np. wykona

$$\text{sprawdzenie } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający poda tylko jedno poprawne rozwiązanie równania z przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$x = \frac{\pi}{6}$ albo $x = \frac{3}{2}\pi$ i wykona odpowiednie sprawdzenie, **to otrzymuje 3 punkty.**

Zadanie 4. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność

$$(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2.$$

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu twierdzenia związanego z działaniami na wyrażeniach wymiernych: dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem wyrażen wymiernych, skracaniem, rozszerzaniem wyrażen wymiernych. (V.2.f)

Rozwiązanie I sposób

Przekształcając nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$ w sposób równoważny otrzymujemy

$$(x+1)x^2 + (y+1)y^2 > 2xy,$$

$$x^3 + x^2 + y^3 + y^2 > 2xy,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3 > 0,$$

$$(x-y)^2 + x^3 + y^3 > 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $(x - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych, natomiast $x^3 > 0$ i $y^3 > 0$, gdyż liczby x i y są dodatnie. To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej: $(x - y)^2 + x^3 + y^3 > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 pkt

gdy uzasadni prawdziwość nierówności $(x - y)^2 + x^3 + y^3 > 0$, np. stwierdzi, że $(x - y)^2 \geq 0$ dla dowolnych liczb rzeczywistych oraz $x^3 > 0$ i $y^3 > 0$ dla liczb dodatnich x i y .

Rozwiązanie II sposób

Ponieważ $x > 0$ i $y > 0$, więc $x + 1 > 1$ i $y + 1 > 1$. Stąd wynika, że

$$(x + 1)\frac{x}{y} + (y + 1)\frac{y}{x} > 1 \cdot \frac{x}{y} + 1 \cdot \frac{y}{x} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Suma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2, czyli

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. W rezultacie $(x + 1)\frac{x}{y} + (y + 1)\frac{y}{x} > 2$, co kończy dowód.

Uwaga

Nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej

i geometrycznej: $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$. Stąd $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze, że $(x + 1)\frac{x}{y} + (y + 1)\frac{y}{x} > \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje 3 pkt

gdy uzasadni prawdziwość nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, np. stwierdzi, że suma liczby dodatniej

i jej odwrotności jest zawsze co najmniej równa 2 lub wykorzysta nierówność między średnią arytmetyczną i średnią geometryczną.

Rozwiązanie III sposób

Przekształcając nierówność $(x+1)\frac{x}{y} + (y+1)\frac{y}{x} > 2$ w sposób równoważny otrzymujemy

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} > 2,$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2.$$

Suma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ to suma liczby dodatniej i jej odwrotności, więc jest co najmniej równa 2,

natomiast suma $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ jest dodatnia, gdyż jest sumą dwóch dodatnich składników. Zatem

nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2$ jest prawdziwa. To kończy dowód.

Uwaga

Nierówność $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ wynika również wprost z twierdzenia o średniej arytmetycznej

i geometrycznej: $\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 1$. Stąd $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje..... 1 pkt

gdy zapisze lewą stronę nierówności w postaci równoważnej: $\frac{x^2}{y} + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x} + \frac{y}{x} > 2$

i w dalszym rozumowaniu dąży do wykazania, że suma $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ jest nie mniejsza niż 2, ale popełnia błędy.

Zdający otrzymuje..... 3 pkt

gdy uzasadni prawdziwość nierówności $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} > 2$, np. stwierdzi, że $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ jest

prawdziwa dla dowolnych liczb dodatnich, co wynika z twierdzenia o sumie liczby dodatniej

i jej odwrotności oraz $\frac{x^2}{y} > 0$ i $\frac{y^2}{x} > 0$ dla liczb rzeczywistych dodatnich x i y .

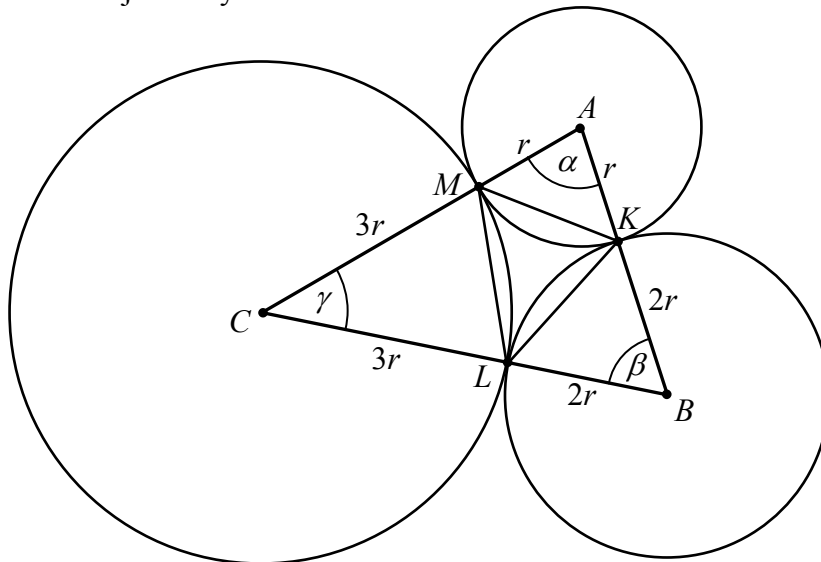
Zadanie 5. (0–5)

Dane są trzy okręgi o środkach A , B , C i promieniach równych odpowiednio r , $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K , drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M . Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC .

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich, także z zastosowaniem trygonometrii, również w zadaniach umieszczonych w kontekście praktycznym. (III.7.c)

I sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Pole trójkąta AMK jest równe

$$P_{AMK} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AK| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha,$$

pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 3r \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 12r^2 \cdot \sin \alpha.$$

Zatem

$$\frac{P_{AMK}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot 12r^2 \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{12}.$$

Podobnie, pole trójkąta BKL jest równe

$$P_{BKL} = \frac{1}{2} |BK| \cdot |BL| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (2r)^2 \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \sin \beta,$$

natomiast pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |BA| \cdot |BC| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 5r \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 15r^2 \cdot \sin \beta,$$

więc

$$\frac{P_{BKL}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} \cdot 15r^2 \cdot \sin \beta} = \frac{4}{15}.$$

Pole trójkąta CLM jest równe

$$P_{CLM} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |CL| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} (3r)^2 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \sin \gamma,$$

natomiast pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |CA| \cdot |CB| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 4r \cdot 5r \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 20r^2 \cdot \sin \gamma,$$

Zatem

$$\frac{P_{CLM}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2} \cdot 20r^2 \cdot \sin \gamma} = \frac{9}{20}.$$

Pole trójkąta KLM jest więc równe

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM} = P_{ABC} - \frac{1}{12} P_{ABC} - \frac{4}{15} P_{ABC} - \frac{9}{20} P_{ABC} = \frac{1}{5} P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyrazi pole trójkąta KLM jako różnicę pól odpowiednich trójkątów:

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający wyrazi pole co najmniej jednego z trójkątów AMK , BKL lub CLM w zależności od r i sinusa odpowiedniego kąta trójkąta ABC .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy pole co najmniej jednego z trójkątów AMK , BKL lub CLM w zależności od

pola trójkąta ABC , np.: $P_{AMK} = \frac{1}{12} P_{ABC}$, $P_{BKL} = \frac{4}{15} P_{ABC}$, $P_{CLM} = \frac{9}{20} P_{ABC}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający

- wyznaczy pole każdego z trójkątów AMK , BKL lub CLM w zależności od pola trójkąta

$$ABC, \text{ np.: } P_{AMK} = \frac{1}{12} P_{ABC}, P_{BKL} = \frac{4}{15} P_{ABC}, P_{CLM} = \frac{9}{20} P_{ABC} \text{ i na tym poprzestanie}$$

albo

- obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC , popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC : $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$.

II sposób rozwiązania

Długości boków trójkąta ABC są równe $|AB| = 3r$, $|AC| = 4r$ i $|BC| = 5r$. Ponieważ

$$|AB|^2 + |AC|^2 = (3r)^2 + (4r)^2 = 9r^2 + 16r^2 = 25r^2 = (5r)^2 = |BC|^2,$$

więc trójkąt ABC jest prostokątny. Zatem

$$\sin \beta = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}, \quad \sin \gamma = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5} \quad \text{oraz} \quad P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = 6r^2.$$

Pole trójkąta prostokątnego AMK jest równe

$$P_{AMK} = \frac{1}{2} |AM| \cdot |AK| = \frac{1}{2} r^2.$$

Pole trójkąta BKL jest równe

$$P_{BKL} = \frac{1}{2} |BK| \cdot |BL| \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (2r)^2 \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot 4r^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} r^2,$$

a pole trójkąta CLM jest równe

$$P_{CLM} = \frac{1}{2} |CM| \cdot |CL| \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} (3r)^2 \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 9r^2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{10} r^2.$$

Pole trójkąta KLM jest więc równe

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM} = 6r^2 - \frac{1}{2} r^2 - \frac{8}{5} r^2 - \frac{27}{10} r^2 = \frac{1}{5} P_{ABC},$$

czyli

$$\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąt ABC jest prostokątny

albo

- wyrazi pole trójkąta KLM jako różnicę pól odpowiednich trójkątów:

$$P_{KLM} = P_{ABC} - P_{AMK} - P_{BKL} - P_{CLM}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający

- obliczy sinusy kątów ostrych trójkąta ABC : $\sin \beta = \frac{4}{5}$, $\sin \gamma = \frac{3}{5}$

albo

- wyznaczy pole trójkąta ABC w zależności od r : $P_{ABC} = 6r^2$

albo

- wyznaczy pole trójkąta AMK w zależności od r : $P_{AMK} = \frac{1}{2} r^2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy pole trójkąta ABC i pole jednego z trójkątów AMK , BKL , CLM

w zależności od r : $P_{ABC} = 6r^2$, $P_{AMK} = \frac{1}{2}r^2$, $P_{BKL} = \frac{8}{5}r^2$, $P_{CLM} = \frac{27}{10}r^2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający

- wyznaczy pole każdego z trójkątów ABC , AMK , BKL lub CLM w zależności od r i na tym poprzestanie

albo

- obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC , popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania).

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC : $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$.

III sposób rozwiązania

Niech

$$|AB| = 3r, |BC| = 5r, |CA| = 4r$$

$$|AK| = |AM| = r, |BK| = |BL| = 2r, |CL| = |CM| = 3r$$

Zauważamy, że $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ$, ponieważ $(3r)^2 + (4r)^2 = (5r)^2$, zatem

$$|KM| = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}.$$

$$\cos|\sphericalangle CBA| = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}, \quad \cos|\sphericalangle ACB| = \frac{4r}{5r} = \frac{4}{5}$$

Zatem z twierdzenia kosinusów mamy

$$|KL| = \sqrt{4r^2 + 4r^2 - 2 \cdot 2r \cdot 2r \cdot \frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}r$$

$$|LM| = \sqrt{9r^2 + 9r^2 - 2 \cdot 3r \cdot 3r \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}r$$

Obliczamy $\cos \sphericalangle KLM$:

$$\begin{aligned} 2r^2 &= |KM|^2 = |ML|^2 + |KL|^2 - 2 \cdot |ML| \cdot |KL| \cdot \cos|\sphericalangle KLM| = \\ &= \frac{18r^2}{5} + \frac{16r^2}{5} - \frac{24\sqrt{50}}{25}r^2 \cdot \cos|\sphericalangle KLM| = \frac{34}{5}r^2 - \frac{24\sqrt{2}}{5}r^2 \cdot \cos|\sphericalangle KLM|. \end{aligned}$$

Zatem

$$\cos|\sphericalangle KLM| = \frac{\frac{34}{5} - 2}{24 \frac{\sqrt{2}}{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ więc } \sin|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wobec tego

$$P_{\Delta KLM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot r \cdot \frac{3\sqrt{10}}{5} r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6r^2}{5}.$$

Ponieważ

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3r \cdot 4r = 6r^2,$$

więc otrzymujemy $\frac{P_{\Delta KLM}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{1}{5}$.

Uwaga

Można obliczyć miarę kąta KLM

$$|\sphericalangle KLM| = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ABC|) - \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle ACB|) = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACB|) = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ$$

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający wyznaczy jeden z boków trójkąta KLM .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający wyznaczy trzy boki trójkąta KLM .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający wyznaczy kosinus jednego z kątów trójkąta KLM , np. $\cos|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający wyznaczy sinus jednego z kątów trójkąta KLM , np. $\sin|\sphericalangle KLM| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający obliczy stosunek pól trójkątów KLM i ABC : $\frac{P_{KLM}}{P_{ABC}} = \frac{1}{5}$.

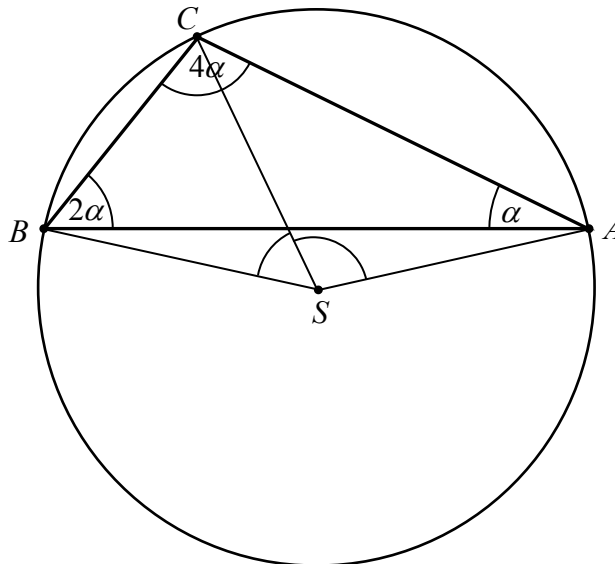
Zadanie 6. (0–3)

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S . Kąty wewnętrzne CAB , ABC i BCA tego trójkąta są równe odpowiednio α , 2α i 4α . Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB , ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

Obszar standardów	Opis wymagań
Rozumowanie i argumentacja	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Korzystanie ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną a cięciwą okręgu (V.5.b, 7.a)

Rozwiązanie

Suma kątów trójkąta jest równa 180° . Zatem $\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180^\circ$, więc $7\alpha = 180^\circ$. Stąd $\alpha = (25\frac{5}{7})^\circ$ oraz $4\alpha = (102\frac{6}{7})^\circ > 90^\circ$. To oznacza, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.



Z twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym wynika, że

$$|\sphericalangle BSC| = 2|\sphericalangle BAC| = 2\alpha \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ASC| = 2|\sphericalangle ABC| = 2 \cdot 2\alpha = 4\alpha.$$

Ponadto, wypukły kąt środkowy ASB ma miarę równą

$$|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle BSC| + |\sphericalangle ASC| = 6\alpha.$$

Ciąg $(6\alpha, 4\alpha, 2\alpha)$ jest arytmetyczny, a jego różnica jest równa (-2α) . To kończy dowód.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje..... 1 pkt

gdy obliczy miarę kąta CAB : $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180^\circ = (25\frac{5}{7})^\circ$ i uzasadni, że trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Uwaga

Zdający nie musi obliczać miary kąta CAB . Wystarczy, że zapisze

$$4\alpha = \frac{4}{7} \cdot 180^\circ > \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy rozważy poprawnie wpisany w okrąg trójkąt ABC i wykorzysta twierdzenie o kącie środkowym i wpisanym do wyznaczenia miary kątów środkowych ASC i BSC w zależności od α : $|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$ oraz $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$.

Zdający otrzymuje 3 pkt

gdy wyznaczy miary wypukłych kątów środkowych ASB , ASC i BSC i stwierdzi, że tworzą one w podanej kolejności ciąg arytmetyczny: $|\sphericalangle ASB| = 6\alpha$, $|\sphericalangle ASC| = 4\alpha$, $|\sphericalangle BSC| = 2\alpha$.

Uwaga

Jeżeli zdający nie uzasadni, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, a udowodni, że miary kątów tworzą ciąg arytmetyczny, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 7. (0–6)

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1 .

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Badanie czy dany ciąg jest arytmetyczny lub geometryczny. Stosowanie wzorów na n -ty wyraz i sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego. (II.5.b, c)

Rozwiązanie

Ponieważ wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie i suma wszystkich jego wyrazów o numerach nieparzystych jest 100 razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych, więc ciąg ten nie jest stały.

Zauważmy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych również jest geometryczny, a jego iloraz jest równy q^2 , gdzie q oznacza iloraz ciągu (a_n) . Tak samo ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych jest geometryczny i jego iloraz również jest równy q^2 . Każdy z tych ciągów ma po 50 wyrazów. Ze wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$a_1 \cdot \frac{1 - (q^2)^{50}}{1 - q^2} = 100a_2 \cdot \frac{1 - (q^2)^{50}}{1 - q^2}.$$

Stąd mamy $a_1 = 100a_2$, czyli $a_1 = 100a_1q$. Zatem $q = \frac{1}{100}$, gdyż $a_1 > 0$.

Ponieważ

$$\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100,$$

więc z własności logarytmów otrzymujemy

$$\log(a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100}) = 100.$$

Z definicji logarytmu otrzymujemy więc

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100} = 10^{100}.$$

Stąd i ze wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego dostajemy równanie z niewiadomą a_1

$$a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{1+2+3+\dots+99} = 10^{100}.$$

Ze wzoru na sumę n -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego mamy

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1+99}{2} \cdot 99} = 10^{100},$$

$$a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100},$$

Stąd

$$a_1 = \frac{10}{\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{99}{2}}} = 10 \cdot 10^{99} = 10^{100}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- zauważy, że ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu geometrycznego o numerach nieparzystych jest geometryczny oraz ciąg, którego kolejnymi wyrazami są wyrazy ciągu (a_n) o numerach parzystych jest geometryczny, a iloraz każdego z tych ciągów jest taki sam

albo

- zapisze równość $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100(a_1q + a_3q + a_5q + \dots + a_{99}q)$

albo

- wykorzysta wzór na sumę logarytmów i definicję logarytmu oraz zapisze równość $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$ w postaci: $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{100} = 10^{100}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający

- zapisze równanie z niewiadomymi a_1 i q : $a_1 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2} = 100a_2 \cdot \frac{1-(q^2)^{50}}{1-q^2}$

albo

- zapisze równość $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99} = 100q(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{99})$

albo

- zapisze równość $a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot \dots \cdot (a_1 \cdot q^{99}) = 10^{100}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....4 pkt

Zdający zapisze równanie z niewiadomą a_1 , np.:

- $a_1 \cdot \left(a_1 \cdot \frac{1}{100}\right) \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2\right) \cdot \dots \cdot \left(a_1 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{99}\right) = 10^{100}$

albo

- zapisze zależności $a_1^{100} q^{4950} = 10^{100}$ i $q = \frac{1}{100}$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy iloraz ciągu geometrycznego: $q = \frac{1}{100}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)5 pkt

Zdający zapisze równanie w postaci $a_1^{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{100 \cdot \frac{99}{2}} = 10^{100}$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie pełne6 pkt

Zdający obliczy pierwszy wyraz ciągu: $a_1 = 10^{100}$.

Zadanie 8. (0–4)

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = (0, 2\sqrt{3})$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi Ox . Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E .

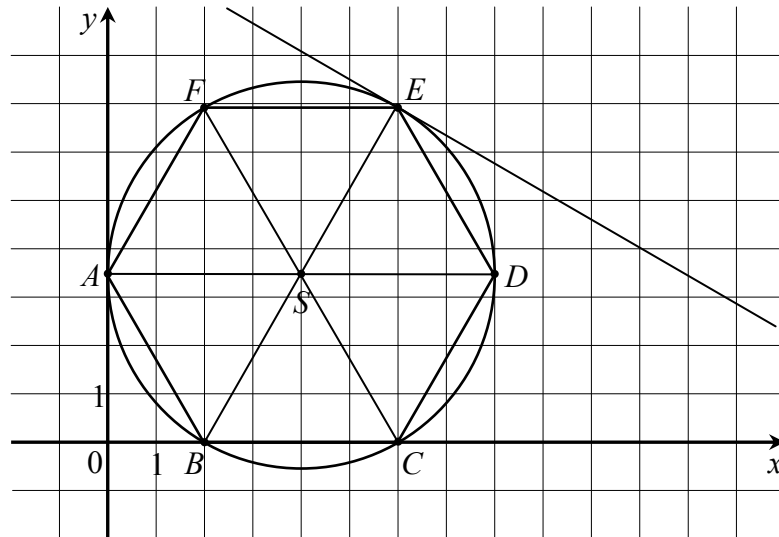
Obszar standardów	Opis wymagań
Użycie i tworzenie strategii	Rozwiązywanie zadań dotyczących wzajemnego położenia prostej i okręgu. (IV.8.b.R)

Rozwiązanie

Obliczmy długość boku sześciokąta

$$|AB| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4.$$

Ponieważ wierzchołek C tego sześciokąta leży na osi Ox , więc $C = (6, 0)$.



Środek S okręgu opisanego na tym sześciokącie ma zatem współrzędne $S = (4, 2\sqrt{3})$.

Punkt S jest środkiem przekątnej BE sześciokąta, więc

$$S = \left(\frac{x_B + x_E}{2}, \frac{y_B + y_E}{2} \right) = \left(\frac{2 + x_E}{2}, \frac{0 + y_E}{2} \right).$$

Zatem

$$\frac{2 + x_E}{2} = 4 \text{ i } \frac{y_E}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Stąd $x_E = 6$ i $y_E = 4\sqrt{3}$, więc $E = (6, 4\sqrt{3})$.

Styczna do okręgu opisanego na sześciokącie foremnym $ABCDEF$ poprowadzona przez wierzchołek E tego sześciokąta jest prostopadła do prostej BE . Ponieważ współczynnik kierunkowy prostej BE jest równy

$$\frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{4\sqrt{3} - 0}{6 - 2} = \sqrt{3},$$

więc współczynnik kierunkowy stycznej jest równy $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Zatem styczna ma równanie

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 6) + 4\sqrt{3},$$

czyli

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- zapisze długość boku sześciokąta $ABCDEF$: $|AB| = 4$

albo

- zapisze współrzędne środka S okręgu opisanego na sześciokącie: $S = (4, 2\sqrt{3})$

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej BE : $\sqrt{3}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej BE : $\sqrt{3}$ i obliczy lub poda współrzędne wierzchołka E : $E = (6, 4\sqrt{3})$

albo

- zapisze, że prosta AC jest równoległa do stycznej

albo

- obliczy lub poda współczynnik kierunkowy prostej AC : $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Uwaga

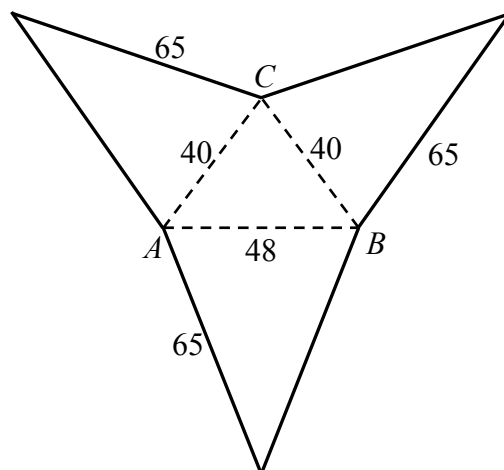
Jeśli zdający obliczy współczynnik kierunkowy stycznej, ale nie obliczy współrzędnych punktu E , to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne.....4 pkt

Zdający zapisze równanie stycznej: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6\sqrt{3}$ lub $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 6) + 4\sqrt{3}$.

Zadanie 9. (0–6)

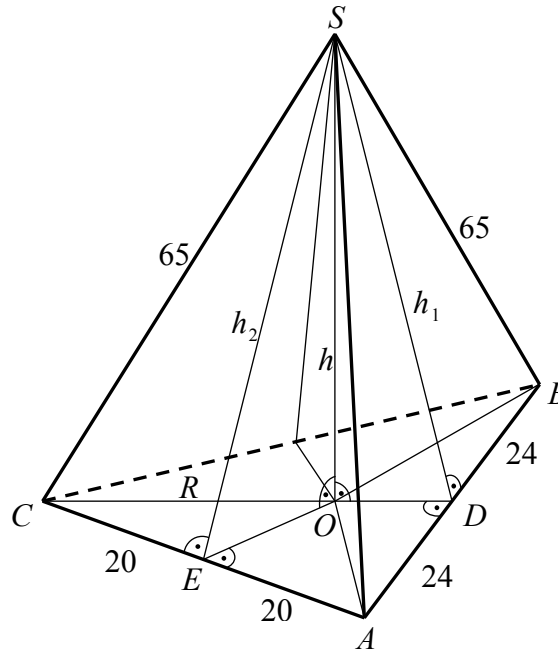
Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatka została przedstawiona na rysunku.



Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Wyznaczanie związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii. (III.9.b)

I sposób rozwiązania

Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC . Wówczas każda z krawędzi bocznych AS , BS i CS ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa mają tę samą długość, więc spodek O wysokości SO ostrosłupa jest punktem przecięcia symetralnych boków jest podstawy, a więc jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Obliczmy promień R tego okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2, \text{ czyli } 24^2 + |DC|^2 = 40^2.$$

Stąd

$$|DC| = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32.$$

Trójkąty OEC i ADC są podobne (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku C), więc

$$\frac{|OC|}{|CE|} = \frac{|AC|}{|CD|}, \text{ czyli } \frac{R}{20} = \frac{40}{32}.$$

Stąd $R = 25$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta COS otrzymujemy

$$|OC|^2 + |SO|^2 = |CS|^2, \text{ czyli } 25^2 + h^2 = 65^2.$$

Stąd

$$h = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

Uwaga

Pole trójkąta ABC możemy obliczyć stosując wzór Herona

$$P_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{64 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 16} = 8 \cdot 24 \cdot 4 = 768.$$

Promień R okręgu opisanego na trójkącie ABC możemy obliczyć wykorzystując wzór

$$P_{ABC} = \frac{abc}{4R}.$$

Stąd

$$R = \frac{abc}{4P_{ABC}} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot 768} = 25.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta ABC ,

np. $|DC| = 32$ albo obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający

- obliczy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = 768$

albo

- obliczy wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C oraz zapisze, że spodek O wysokości SO ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Uwaga

Wystarczy, że zdający oblicza promień okręgu opisanego na trójkącie ABC .

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze równanie pozwalające obliczyć promień okręgu opisanego na trójkącie ABC ,

np.: $768 = \frac{40 \cdot 40 \cdot 48}{4 \cdot R}$ lub $\frac{R}{20} = \frac{40}{32}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h = 60$

albo

- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo

- pominie we wzorze na objętość współczynnik $\frac{1}{3}$ i otrzyma: $V_{ABCS} = 46080$

albo

- pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$ i otrzyma: $P_{ABC} = 1536$,

$$V_{ABCS} = 30720.$$

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy promień okręgu opisanego na trójkącie ABC : $R = 25$ oraz zapisze równanie pozwalające obliczyć wysokość ostrosłupa, np.: $25^2 + h^2 = 65^2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**.

Rozwiązanie pełne 6 pkt

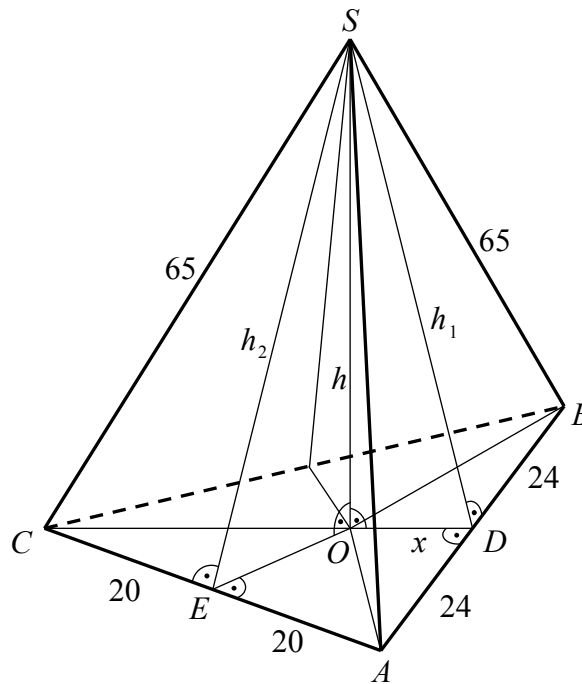
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V_{ABCS} = 15360$.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik $\frac{1}{3}$ i pominie współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe zadanie.

II sposób rozwiązania

Przyjmijmy, że podstawą ostrosłupa jest trójkąt ABC . Wówczas każda z krawędzi bocznych AS , BS i CS ma długość 65. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy takie jak na rysunku.



Ponieważ krawędzie podstawy AC i BC mają równe długości i krawędzie boczne AS i BS mają równe długości, więc spodek O wysokości SO ostrosłupa leży na symetralnej CD odcinka AB . Odcinek CD jest również wysokością trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C . Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADC otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2, \text{ czyli } 24^2 + |DC|^2 = 40^2.$$

Stąd

$$|DC| = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADS otrzymujemy

$$|AD|^2 + |DS|^2 = |AS|^2, \text{ czyli } 24^2 + h_1^2 = 65^2.$$

Stąd

$$h_1 = \sqrt{65^2 - 24^2} = \sqrt{3649}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów DOS i COS otrzymujemy

$$|DO|^2 + |SO|^2 = |SD|^2 \text{ oraz } |OC|^2 + |SO|^2 = |CS|^2,$$

czyli

$$x^2 + h^2 = 3649 \text{ oraz } (32 - x)^2 + h^2 = 65^2.$$

$$x^2 + h^2 = 3649 \text{ oraz } 32^2 - 64x + x^2 + h^2 = 65^2.$$

Stąd

$$32^2 - 64x + 3649 = 65^2, \\ x = 7,$$

więc

$$h = \sqrt{3649 - 7^2} = 60.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 32 = 768.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 768 \cdot 60 = 15360.$$

Uwaga

Możemy też przyjąć, że podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt ABS i wówczas wysokość ostrosłupa będzie odcinkiem CM , gdzie punkt M leży na wysokości SD tej podstawy. Tak jak w II sposobie rozwiązania obliczamy $|CD| = 32$ oraz $|SD| = \sqrt{3649}$. Oznaczając $|MD| = y$ oraz $|CM| = h_3$, a następnie stosując twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta MDC i trójkąta ASM otrzymujemy

$$|MD|^2 + |CM|^2 = |CD|^2 \quad \text{oraz} \quad |SM|^2 + |CM|^2 = |CS|^2,$$

czyli

$$y^2 + h_3^2 = 32^2 \quad \text{oraz} \quad (\sqrt{3649} - y)^2 + h_3^2 = 65^2, \\ y^2 + h_3^2 = 1024 \quad \text{oraz} \quad 3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + y^2 + h_3^2 = 4225,$$

Stąd

$$3649 - 2\sqrt{3649} \cdot y + 1024 = 4225, \\ y = \frac{224}{\sqrt{3649}}.$$

$$\text{Zatem } h_3 = \sqrt{1024 - y^2} = \sqrt{1024 - \left(\frac{224}{\sqrt{3649}}\right)^2} = \sqrt{1024 - \frac{50176}{3649}} = \frac{1920}{\sqrt{3649}}.$$

Pole trójkąta ABC jest równe

$$P_{ABS} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |SD| = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \sqrt{3649} = 24\sqrt{3649}.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3} P_{ABS} \cdot h_3 = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3649} \cdot \frac{1920}{\sqrt{3649}} = 15360.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający obliczy jedną z wielkości potrzebnych do obliczenia pola trójkąta ABC ,

np. $|DC| = 32$ albo obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt
Zdający

- obliczy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = 768$

albo

- obliczy wysokość trójkąta ABS opuszczoną z wierzchołka S oraz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka C : $|SD| = \sqrt{3649}$, $|DC| = 32$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt
Zdający

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę ABC z wierzchołka S : $x^2 + h^2 = 3649$ i $(32 - x)^2 + h^2 = 65^2$

albo

- zapisze układ równań pozwalający obliczyć wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę ABS z wierzchołka C : $x^2 + h_3^2 = 32^2$ i $(\sqrt{3649} - x)^2 + h_3^2 = 65^2$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt
Zdający

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę ABC z wierzchołka S i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h = 60$

albo

- obliczy wysokość ostrosłupa opuszczoną na podstawę ABS z wierzchołka C i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy: $h_3 = \frac{1920}{\sqrt{3649}}$

albo

- obliczy objętość popełniając błędy rachunkowe (nawet na wcześniejszych etapach rozwiązania)

albo

- pominie we wzorze na objętość współczynnik $\frac{1}{3}$ i otrzyma: $V_{ABCS} = 46080$

albo

- pominie we wzorze na pole trójkąta współczynnik $\frac{1}{2}$ i otrzyma: $P_{ABC} = 1536$,
 $V_{ABCS} = 30720$.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy długość odcinka OD : $x = 7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**. Podobnie jeśli zdający obliczy długość odcinka MD :

$y = \frac{224}{\sqrt{3649}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **4 punkty**

Rozwiązanie pełne 6 pkt
Zdający obliczy objętość ostrosłupa: $V_{ABCS} = 15360$.

Uwaga

Jeżeli zdający pominie we wzorze na objętość ostrosłupa współczynnik $\frac{1}{3}$ i pominie współczynnik $\frac{1}{2}$ we wzorze na pole trójkąta, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Zadanie 10. (0–5)

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m , dla których równanie $(x^3 + 2x^2 + 2x + 1)[x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m] = 0$ ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste takie, że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

Obszar standardów	Opis wymagań
Modelowanie matematyczne	Stosowanie twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych. (III.2.c.R)

I sposób rozwiązania

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba -1 , gdyż

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m.$$

Ponieważ $\Delta = (-(2m + 1))^2 - 4(m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1$, więc tymi

$$\text{pierwiastkami są liczby } x_1 = \frac{2m + 1 - 1}{2} = m, \quad x_2 = \frac{2m + 1 + 1}{2} = m + 1.$$

Wyznamy wszystkie wartości parametru m , dla których jeden z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Mamy więc

$$-1 = \frac{m + 1 + m}{2} \quad \text{lub} \quad m = \frac{m + 1 + (-1)}{2} \quad \text{lub} \quad m + 1 = \frac{m + (-1)}{2}.$$

Stąd $m = -\frac{3}{2}$ lub $m = 0$ lub $m = -3$. Ponieważ m jest liczbą całkowitą, więc istnieją dwie szukane wartości parametru m : $m = 0$ lub $m = -3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania.....1 pkt

Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest -1 .

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający

- stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający wyznaczy wszystkie pierwiastki wielomianu $W(x)$: -1 , m , $m+1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)..... 4 pkt

Zdający

- zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru m :

$$-1 = \frac{m+1+m}{2} \quad \text{lub} \quad m = \frac{m+1+(-1)}{2} \quad \text{lub} \quad m+1 = \frac{m+(-1)}{2}$$

albo

- zapisze jedno z równań i konsekwentnie obliczy wartość parametru m (w przypadku równania $-1 = \frac{m+1+m}{2}$ sformułuje wniosek, że nie istnieje taka całkowita wartość parametru m)

albo

- rozwiąże zadanie do końca z błędami rachunkowymi, konsekwentnie formułując końcowy wniosek.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru: $m = -3$, $m = 0$.

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze równania pozwalające obliczyć szukane wartości parametru m :

$$-1 = \frac{m+1+m}{2} \quad \text{lub} \quad m = \frac{m+1+(-1)}{2} \quad \text{lub} \quad m+1 = \frac{m+(-1)}{2},$$

rozwiąże je i nie odrzuci $m = -\frac{3}{2}$, to otrzymuje **4 punkty**.

II sposób rozwiązania („wzory Viete’a”)

Zauważmy, że jednym z pierwiastków równania jest liczba -1 , gdyż

$$(-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1 = 0.$$

Pozostałe pierwiastki wielomianu równania to pierwiastki trójmianu kwadratowego

$$P(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 + m.$$

Ponieważ $\Delta = (-(2m+1))^2 - 4(m^2 + m) = 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m = 1$, więc ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1 i x_2 , spełniające zależności:

$$x_1 + x_2 = 2m + 1, \quad x_1 \cdot x_2 = m^2 + m.$$

Wyznamy teraz wszystkie wartości parametru m , dla których jeden z pierwiastków wielomianu $W(x)$ jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych. Zapisujemy więc równości

$$-1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{lub} \quad x_1 = \frac{x_2 - 1}{2} \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{x_1 - 1}{2}.$$

Uwzględniając wzory Viete’a, z pierwszego równania otrzymujemy $m = -\frac{3}{2}$. Ponieważ m

jest liczba całkowitą, więc to rozwiązanie odrzucamy. Z drugiego równania wyznaczamy

$$x_2 = 2x_1 + 1, \quad \text{a następnie ze wzoru Viete’a na sumę pierwiastków otrzymujemy} \quad x_2 = \frac{2}{3}m.$$

Po podstawieniu tej zależności do wzoru Viete’a na iloczyn pierwiastków otrzymujemy równanie:

$$\left(2 \cdot \frac{2}{3}m + 1\right) \cdot \frac{2}{3}m = m^2 + m.$$

Po przekształceniach to równanie przyjmuje postać: $m^2 + 3m = 0$. Równanie to ma dwa rozwiązania: -3 oraz 0 , stanowiące szukane całkowite wartości parametru.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający sprawdzi, że jednym z pierwiastków równania jest -1

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający stwierdzi, że pozostałymi pierwiastkami równania są pierwiastki trójmianu kwadratowego $x^2 - (2m + 1)x + m^2 + m$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

Zdający zapisze równanie $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$ i co najmniej jedno z równań $\frac{x_1 - 1}{2} = x_2$, $\frac{x_2 - 1}{2} = x_1$

oraz oba równania wynikające z wzorów Viete'a:

$$x_1 + x_2 = 2m + 1 \text{ i } x_1 \cdot x_2 = m^2 + m.$$

Uwaga

Jeżeli zdający zapisze jedynie równanie $\frac{x_1 + x_2}{2} = -1$, rozwiąże je, otrzymując $m = -\frac{3}{2}$,

i odrzuci ten wynik, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 pkt

Zdający doprowadzi układ równań, np.

$$\begin{cases} \frac{x_1 - 1}{2} = x_2 \\ x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m \end{cases}$$

do równania kwadratowego z niewiadomą m , np. $\frac{2}{3}m \left(\frac{4}{3}m + 1\right) = m^2 + m$.

Rozwiązanie pełne 5 pkt

Zdający wyznaczy szukane całkowite wartości parametru: $m = -3$, $m = 0$.

Zadanie 11. (0–4)

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych.

Obszar standardów	Opis wymagań
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa i stosowanie twierdzenia znanego jako <i>klasyczna definicja prawdopodobieństwa</i> do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń. (II.10.d)

I sposób rozwiązania (model klasyczny-kombinacje)

Zdarzeniami elementarnymi są trzejelementowe podzbiory $\{a, b, c\}$ zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$.

Mamy do czynienia z modelem klasycznym.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 5 \cdot 3 \cdot 8 = 120.$$

Niech A oznacza zdarzenie - wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich zbiorów $\{a, b, c\}$, że $a > b > c$ i $a = b + c$. Liczba a może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:

$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$, więc są 4 takie podzbiory, gdzie $a = 10$,

$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$, więc są 4 takie podzbiory, gdzie $a = 9$,

$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$, więc są 3 takie podzbiory, gdzie $a = 8$,

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$, więc są 3 takie podzbiory, gdzie $a = 7$,

$6 = 5 + 1 = 4 + 2$, więc są 2 takie podzbiory, gdzie $a = 6$,

$5 = 4 + 1 = 3 + 2$, więc są 2 takie podzbiory, gdzie $a = 5$,

$4 = 3 + 1$, więc jest 1 taki podzbiór, gdzie $a = 4$,

$3 = 2 + 1$, więc jest 1 taki podzbiór, gdzie $a = 3$.

W rezultacie

$$|A| = 2(4 + 3 + 2 + 1) = 2 \cdot 10 = 20.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$

albo

- opíše zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A , np. w postaci $\{a, b, c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$.

Uwaga

Zdający może również zapisać $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt

Zdający

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a, b, c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 20$

albo

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$ i opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a, b, c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt

Zdający zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = \binom{10}{3}$ oraz opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci $\{a, b, c\}$, gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 20$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A pominie co najwyżej jeden przypadek i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A zapisze podzbiór, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np. $\{10, 5, 5\}$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opíše zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe i otrzymany wynik jest z przedziału $(0, 1)$, to otrzymuje 3 punkty. Jeżeli natomiast otrzyma wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

II sposób rozwiązania (model klasyczny-wariacje)

Niech zdarzeniem elementarnym będzie trzywyrazowy ciąg (a, b, c) , którego wyrazami są liczby ze zbioru $\{1, 2, \dots, 10\}$ takie, że $a \neq b$ i $a \neq c$ i $b \neq c$. Mamy do czynienia z modelem klasycznym. Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa

$$|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy takie trzy kule, że numer jednej z wylosowanych kul będzie równy sumie numerów dwóch pozostałych. Wystarczy wyznaczyć liczbę takich ciągów (a, b, c) , że $a > b > c$ i $a = b + c$, czyli ciągów malejących.

Liczba a może przyjąć wszystkie wartości od 10 do 3 włącznie. I tak:

$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4$, więc są 4 takie ciągi, gdzie $a = 10$,

$9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4$, więc są 4 takie ciągi, gdzie $a = 9$,

$8 = 7 + 1 = 6 + 2 = 5 + 3$, więc są 3 takie ciągi, gdzie $a = 8$,

$7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3$, więc są 3 takie ciągi, gdzie $a = 7$,

$6 = 5 + 1 = 4 + 2$, więc są 2 takie ciągi, gdzie $a = 6$,

$5 = 4 + 1 = 3 + 2$, więc są 2 takie ciągi, gdzie $a = 5$,

$4 = 3 + 1$, więc jest 1 taki ciąg, gdzie $a = 4$,

$3 = 2 + 1$, więc jest 1 taki ciąg, gdzie $a = 3$.

Z każdego takiego ciągu malejącego można utworzyć $3! = 6$ zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A . W rezultacie

$$|A| = 3! \cdot 2(4 + 3 + 2 + 1) = 6 \cdot 20 = 120.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe

$$P(A) = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}.$$

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postępowanie jest niewielkie, ale konieczne na drodze do pełnego rozwiązania 1 pkt

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$

albo

- opíše zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A , np. w postaci (a, b, c) , gdzie $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

Zdający

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci (a, b, c) , gdzie $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$ oraz obliczy liczbę ciągów (a, b, c) , gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ (albo $a < b < c$ i $a + b = c$): 49

albo

- opíše zdarzenia sprzyjające np. w postaci (a, b, c) , gdzie $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$ oraz obliczy liczbę ciągów (a, b, c) w jednej z tych sytuacji, np. w sytuacji, gdy $a = b + c$

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$ i opíše zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A , np. w postaci (a, b, c) , gdzie $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 pkt

- Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8$ oraz opíše zdarzenia sprzyjające zajściu zdarzenia A , np. w postaci (a, b, c) , gdzie $a = b + c$ lub $b = a + c$ lub $c = a + b$ oraz obliczy ich liczbę: $|A| = 6 \cdot 20$.

Rozwiązanie pełne 4 pkt

Zdający obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A : $P(A) = \frac{1}{6}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci (a, b, c) , gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ (albo $a < b < c$ i $a + b = c$), pominie co najwyżej jedno i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający wypisując zdarzenia elementarne sprzyjające postaci (a, b, c) , gdzie $a > b > c$ i $a = b + c$ (albo $a < b < c$ i $a + b = c$) zapisze ciąg, który nie jest zdarzeniem elementarnym w przyjętym modelu, np. $(10, 5, 5)$, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych.
3. Jeżeli zdający poprawnie poda liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych, poprawnie opisz zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A (lub je wypisze) i poda ich liczbę, ale popełni błędy rachunkowe, jednak otrzymany wynik jest z przedziału $(0, 1)$, to otrzymuje **3 punkty**. Jeżeli natomiast otrzyma wynik $P(A) > 1$, to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.
4. Jeżeli zdający stosuje różne modele probabilistyczne do obliczenia $|\Omega|$ i $|A|$, to otrzymuje **0 punktów**.