CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY
W ROKU SZKOLNYM 2014/2015

FORMUŁA OD 2015
(„NOWA MATURA”)

MATEMATYKA
POZIOM ROZSZERZONY

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ
ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2015

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Nr zad.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Odp.	D	B	C	C	A

Schemat oceniania zadania 6. i zadań otwartych

Zadanie 6. (0–2)

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x|<|x-1025|$. W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.

Odpowiedź
Szukaną liczbą jest 512.

<u>**Schemat oceniania**</u>
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy zapisze cyfry: $5, 1, 2$.

Zadanie 7. (0–2)

Prosta o równaniu $y=\frac{3}{4}x-\frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S=(1,-4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

Rozwiązanie

Zapisujemy równanie prostej w postaci ogólnej : $-3x+4y+\frac{122}{7}=0$. Obliczamy długość promienia okręgu: $r=\frac{\left|-3\cdot 1+4\cdot(-4)+\frac{122}{7}\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{11}{35}$.

Odpowiedź
Promień okręg ma długość $r=\frac{11}{35}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze równanie prostej w postaci: $-3x+4y+\frac{122}{7}=0$ oraz wykorzysta wzór na odległość punktu od prostej i zapisze $r=\frac{\left|-3\cdot 1+4\cdot(-4)+\frac{122}{7}\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 p.

gdy obliczy promień okręgu $r=\frac{11}{35}$.

Zadanie 8. (0–3)

Niech $a=\log_{12}2$. Wykaż, że $\log_6 64=\frac{6a}{1-a}$.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Zmieniamy podstawę logarytmu i wykonujemy kolejno przekształcenia

$$\log_6 64=\frac{\log_{12}64}{\log_{12}6}=\frac{\log_{12}2^6}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)}=\frac{6\log_{12}2}{\log_{12}12-\log_{12}2}=\frac{6a}{1-a}.$$ To kończy dowód.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 p.

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64=\frac{\log_{12}64}{\log_{12}6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ......……………...………………………..2 p.

Zdający zapisze, że

$$\log_6 64=\frac{\log_{12}2^6}{\log_{12}\left(\frac{12}{2}\right)}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne……...…...……………………... ....3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Zauważamy kolejno, że

$$\frac{6a}{1-a}=\frac{6\log_{12}2}{\log_{12}12-\log_{12}2}=\frac{\log_{12}64}{\log_{12}6}=\log_6 64.$$

A to kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a}=\frac{\log_{12}2^6}{\log_{12}12-\log_{12}2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... ……………..…………………………..2 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{6a}{1-a}=\frac{\log_{12}64}{\log_{12}6}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne……..…...……………………... .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Równość $a=\log_{12}2$ jest równoważna równości $12^a=2$. Podzielimy tę równość stronami przez dodatnią liczbę 2^a. Otrzymujemy równość

$$\frac{12^a}{2^a}=\frac{2}{2^a}\text{, a zatem } 6^a=2^{1-a}.$$

Ponieważ obie strony równości są dodatnie, więc ta równość jest równoważna równości

$$6^{6a}=64^{1-a}\text{, a zatem } 6^{\frac{6a}{1-a}}=64.$$

Ostatnia równość oznacza, że $\log_6 64=\frac{6a}{1-a}$. To kończy dowód.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze, że

$$\frac{12^a}{2^a}=\frac{2}{2^a}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..... ……………..…………………………..2 p.

Zdający zapisze, że

$$6^{6a}=64^{1-a}$$

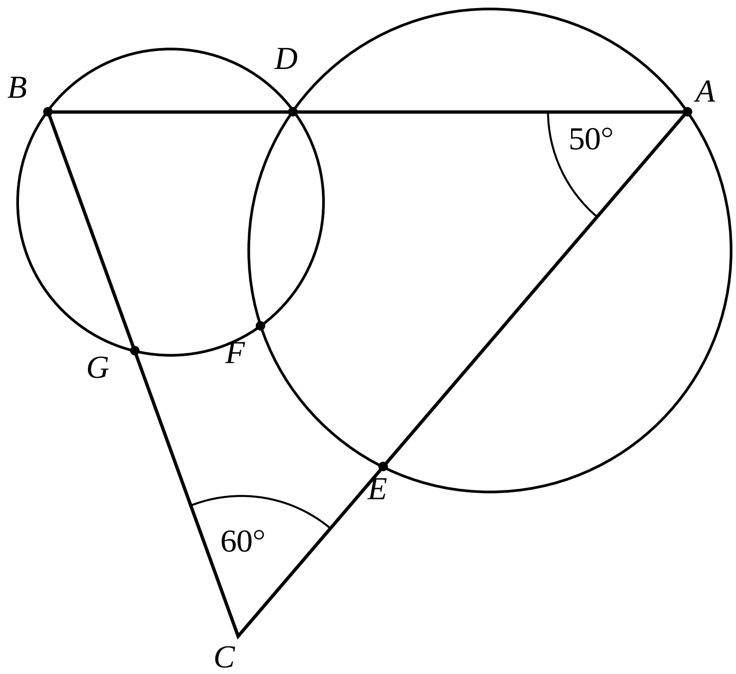
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne……..…...……………………... .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–3)

W trójkącie *ABC* kąt wewnętrzny przy wierzchołku *A* ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt *A* i przecina boki *AB* i *AC* trójkąta odpowiednio w punktach *D* i *E*. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt *B*, przecina okrąg o_1 w punkcie *D* oraz w punkcie *F* leżącym wewnątrz trójkąta *ABC*. Ponadto okrąg o_2 przecina bok *BC* trójkąta w punkcie *G*.

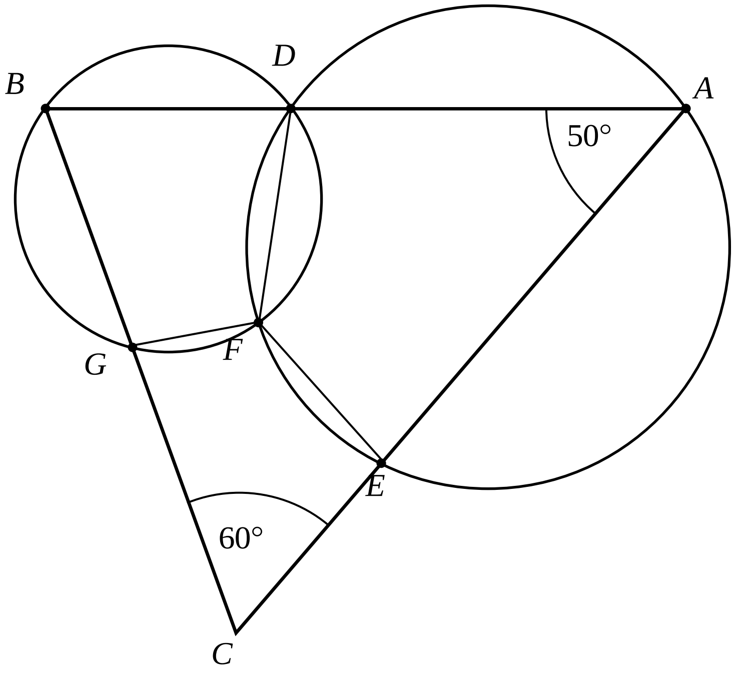


Udowodnij, że na czworokącie *CEFG* można opisać okrąg.

Rozwiązanie

Trzeci kąt trójkąta *ABC* ma miarę: $|\sphericalangle ABC| = 180° - (50° + 60°) = 70°$.

Połączmy punkt *F* z punktami *D*, *E* i *G*.



Czworokąty *ADFE* i *BDFG* są wpisane odpowiednio w okręgi O_1 i O_2, więc

$|\sphericalangle DFE| = 180° - 50° = 130°$ oraz $|\sphericalangle DFG| = 180° - 70° = 110°$. Zatem

$|\sphericalangle EFG| = 360° - (130° + 110°) = 120°$.

Stąd $|\sphericalangle EFG| + |\sphericalangle ECG| = 120° + 60° = 180°$, zatem na czworokącie *CEFG* można opisać okrąg, co kończy dowód.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Obliczenie miary kąta *DFE*: $|\sphericalangle DFE| = 130°$ **albo** miary kąta *DFG*: $|\sphericalangle DFG| = 110°$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Obliczenie miary kąta *EFG*: $|\sphericalangle EFG| = 120°$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Pełne uzasadnienie, że na czworokącie *CEFG* można opisać okrąg.

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot \sin x=\cos^2 x-3\sin^2 x$, dla $x\in\left(-\pi,0\right)$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ i zapisujemy równanie
$\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot \sin x=\cos^2 x-3\sin^2 x$ w postaci równoważnej $\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot \sin x=1-4\sin^2 x$.
Przekształcamy to równanie i zapisujemy je w postaci iloczynowej:
$\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot \sin x-1+4\sin^2 x=0$,
$\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot\left(\sin x+1\right)=0$,
$\left(2\sin x-1\right)\cdot\left(2\sin x+1\right)\cdot\left(\sin x+1\right)=0$.

Warunek $\sin x=\frac{1}{2}$ jest sprzeczny z założeniem $x\in\left(-\pi,0\right)$, bo wtedy $\sin x<0$.

Zatem warunki $\sin x=-\frac{1}{2}$ i $x\in\left(-\pi,0\right)$ wyznaczają rozwiązanie $x=-\frac{\pi}{6}$ lub $x=-\frac{5\pi}{6}$,

a warunki $\sin x=-1$ i $x\in\left(-\pi,0\right)$ wyznaczają rozwiązanie $x=-\frac{\pi}{2}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp, ale nie zostały pokonane zasadnicze trudności zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania z niewiadomą $\sin x$: $\left(4\sin^2 x-1\right)\cdot \sin x=1-4\sin^2 x$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie równania w postaci alternatywy: $\sin x=\frac{1}{2}$ lub $\sin x=-\frac{1}{2}$, lub $\sin x=-1$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Rozwiązanie jednego z trzech równań w przedziale $\left(-\pi,0\right)$

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Podanie wszystkich rozwiązań należących do przedziału $\left(-\pi,0\right)$:

$x=-\frac{\pi}{6}$ lub $x=-\frac{5\pi}{6}$, lub $x=-\frac{\pi}{2}$.

Uwagi

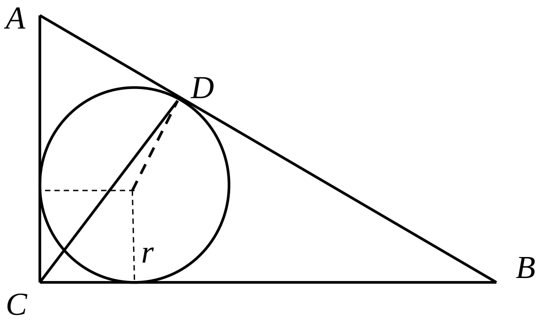
1. Jeżeli zdający nie odrzuci warunku $\sin x=\frac{1}{2}$ oraz wyznaczy z pozostałych warunków poprawne rozwiązania równania, to otrzymuje **3 punkty.**
2. Jeżeli zdający poda ogólne rozwiązania równania bez uwzględnienia przedziału $\left(-\pi,0\right)$, to otrzymuje **3 punkty.**

Zadanie 11. (0–4)

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczamy, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, długość przeciwprostokątnej AB: $|AB| = 25$ i kosinus kąta $\sphericalangle CAB$: $\cos\sphericalangle CAB = \frac{3}{5}$.

Obliczamy promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny:

$$r = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = \frac{15 + 20 - 25}{2} = 5.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych wyznaczamy długość odcinka AD: $|AD| = 10$.

Obliczamy $|CD|$ stosując twierdzenie kosinusów dla trójkąta ACD:

$$|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2 - 2|AC||AD|\cos\sphericalangle CAD = 225 + 100 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 145.$$

Stąd $|CD| = \sqrt{145}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..1 pkt

Zdający obliczy długość przeciwprostokątnej i kosinusa kąta ostrego trójkąta:

$$|AB| = 25,\ \cos\sphericalangle CAB = \frac{3}{5}.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp...2 pkt

Zdający obliczy długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt: $r = 5$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Obliczenie długości odcinka *AD*: $|AD| = 10$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie długości odcinka *CD*: $|CD| = \sqrt{145}$.

Uwaga

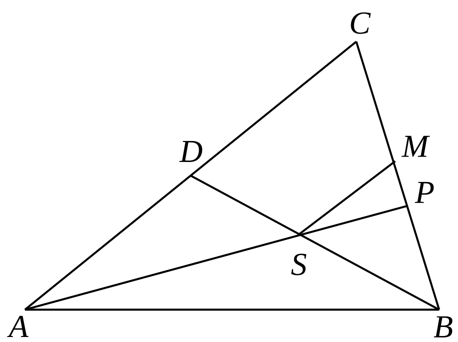
Jeżeli zdający zakłada, że odcinek CD jest prostopadły do przeciwprostokątnej AB i z tego korzysta, to za całe zadanie może otrzymać nie więcej niż **1 punkt**.

Zadanie 12. (0–4)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka *B* poprowadzono środkową *BD* do boku *AC*. Punkt *S* jest środkiem odcinka *BD*. Przez punkty *A* i *S* poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P. Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

Rozwiązanie

Rysujemy trójkąt ABC, zaznaczamy punkty D, S, P i rysujemy odcinek SM równoległy do AC i taki, że $M \in BC$.



Trójkąty BSM i BDC są podobne, zatem $\frac{|BS|}{|DB|} = \frac{|BM|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, stąd $|BM| = |CM| = \frac{1}{2}a$

i $|MS| = \frac{1}{2}|DC| = \frac{1}{4}|AC|$

Trójkąty PSM i PAC są podobne, zatem $\frac{|PM|}{|MS|} = \frac{|PC|}{|AC|}$. Stąd $\frac{|MP|}{|MS|} = \frac{|PM| + |CM|}{|AC|}$

i $\frac{|MP|}{\frac{1}{4}|AC|} = \frac{|MP| + \frac{1}{2}a}{|AC|}$, czyli $4|MP| = |MP| + \frac{1}{2}a$. Stąd $|MP| = \frac{1}{6}a$.

Szukany odcinek ma więc długość: $|CP| = |MC| + |MP| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{6}a = \frac{2}{3}a$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający zauważy, że trójkąty BSM i BDC są podobne i zapisze proporcję $\frac{|BS|}{|DB|}=\frac{|BM|}{|BC|}=\frac{1}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający obliczy długość odcinka CM oraz wyznaczy długość odcinka MS w zależności od długości odcinka AC : $|CM|=\frac{1}{2}a$, $|MS|=\frac{1}{2}|DC|=\frac{1}{4}|AC|$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający obliczy długość odcinka MP: $|MP|=\frac{1}{6}a$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowania, tzn. wyznaczy długość odcinka: $|CP|=\frac{2}{3}a$.

Zadanie 13. (0–5)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

<u>Rozwiązanie</u>

W zapisie liczby mają być co najwyżej dwie dwójki, tzn. zero dwójek lub jedna dwójka, lub dwie dwójki.

1. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie nie ma dwójki: na pierwszym miejscu występuje dowolna spośród 8 cyfr (bez zera i dwójki), na drugim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim jedna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym jedna z 9 cyfr (bez dwójki) i na piątym miejscu jedna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych bez dwójki jest: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 4=23328$.

2. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka:

a) dwójka występuje na pierwszym miejscu, na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na pierwszym miejscu jest: $9\cdot 9\cdot 9\cdot 4=2916$.

b) dwójka występuje na drugim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na drugim miejscu jest: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 4 = 2592$.

c) dwójka występuje na trzecim miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na trzecim miejscu jest: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 4 = 2592$.

d) dwójka występuje na czwartym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na piątym dowolna z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na czwartym miejscu jest: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 4 = 2592$.

e) dwójka na piątym miejscu, na pierwszym dowolna z 8 cyfr (bez dwójki i zera), na drugim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na trzecim dowolna z 9 cyfr (bez dwójki), na czwartym dowolna z 9 cyfr (bez dwójki). Zatem liczb parzystych pięciocyfrowych z dwójką na piątym miejscu jest: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 5832$.

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z jedną dwójką jest:
$2916 + 2592 + 2592 + 2592 + 5832 = 16524$.

3. Obliczamy, ile jest liczb 5-cyfrowych parzystych, w których zapisie są dokładnie dwie dwójki:

a) jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, druga na drugim, trzecim lub czwartym, zatem każdą z pozostałych środkowych dwóch cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Tych liczb jest więc: $3\cdot 9\cdot 9\cdot 4 = 972$.

b) jedna dwójka występuje na pierwszym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem każdą z pozostałych środkowych trzech cyfr wybieramy spośród 9 cyfr (bez dwójki). Tych liczb jest więc: $9\cdot 9\cdot 9 = 729$.

c) jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na trzecim lub czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera) pozostałą środkową spośród 9 cyfr (bez dwójki) i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$. Tych liczb jest więc: $2\cdot 8\cdot 9\cdot 4 = 576$.

d) jedna dwójka występuje na drugim miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), pozostałe dwie środkowe cyfry spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc: $8\cdot 9\cdot 9 = 648$.

e) jedna dwójka występuje na trzecim miejscu, a druga dwójka na czwartym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 i piątą cyfrę spośród z cyfr należących do zbioru $\{0,4,6,8\}$.Tych liczb jest więc: $8\cdot 9\cdot 4 = 288$.

f) jedna dwójka występuje na trzecim lub na czwartym miejscu, a druga dwójka na piątym miejscu, zatem pierwszą cyfrę wybieramy spośród 8 (bez dwójki i zera), drugą spośród 9 (bez dwójki) i trzecią lub czwartą cyfrę spośród 9 (bez dwójki). Tych liczb jest więc: $2\cdot 8\cdot 9\cdot 9=1296$.

Stąd wszystkich liczb pięciocyfrowych z dwiema dwójkami jest $972+729+576+648+288+1296=4509$.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki jest: $23328+16524+4509=44361$.

Odpowiedź: Jest 44361 liczb parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.
Zapisanie, że szukamy liczb, w których zapisie występuje zero, jedna lub dwie dwójki i obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych bez dwójki: $8\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 4=23328$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 3 p.
Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych , w których zapisie jest dokładnie jedna dwójka: $2916+2592+2592+2692+5832=16524$.

Uwaga
Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 4 p.
Obliczenie, ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych , w których zapisie są dwie dwójki: $972+729+576+648+288+1296=4509$.

Uwaga
Zdający otrzymuje **3 punkty**, gdy pominie jeden przypadek.

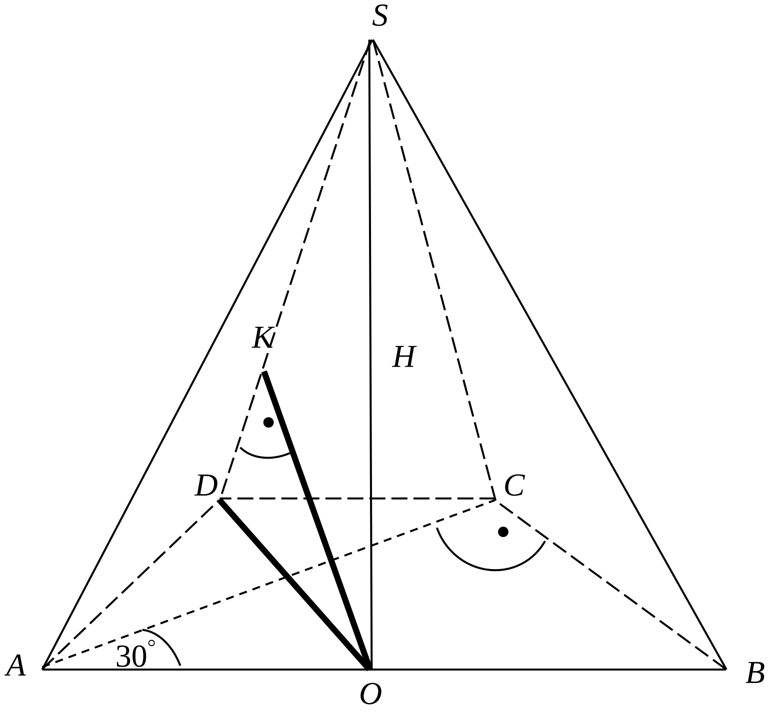
Rozwiązanie pełne .... 5 p.
Obliczenie, ile jest wszystkich liczb, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki: $23328+16524+4509=44361$.

Zadanie 14. (0–5)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest trapez *ABCD*. Przekątna *AC* tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia *BC* i tworzy z dłuższą podstawą *AB* tego trapezu kąt o mierze 30°. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej *SD*.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez *ABCD* jest trapezem równoramiennym, gdzie $|AD|=|BC|$. Przekątna *d* trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Stąd środek *O* okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy *AB* trapezu. Zatem ściana boczna *ABS* jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta *ABC* mamy $|BC|=|AD|=8$.

Dalej wyznaczamy $|\sphericalangle ODA|=60^\circ$ i $|AO|=|OD|$, czyli trójkąt *AOD* jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta *SOD* lub *AOS* mamy $H^2+8^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2$. Stąd $H=4$.

Z trójkąta *SOD* otrzymujemy: $|OK|=\frac{8\sqrt{5}}{5}$. Krawędzie boczne ostrosłupa są tej samej długości, zatem spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa i trapez *ABCD* jest trapezem równoramiennym, gdzie $|AD|=|BC|$. Przekątna *d* trapezu będącego podstawą ostrosłupa jest prostopadła do ramienia $|BC|$. Stąd środek O okręgu opisanego na podstawie jest środkiem dłuższej podstawy AB trapezu. Zatem ściana boczna ABS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Z trójkąta ABC mamy $|BC|=|AD|=8$.

Dalej mamy $|\sphericalangle ODA|=60^\circ$ i $|AO|=|OD|$, czyli trójkąt AOD jest trójkątem równobocznym o boku długości 8.

Z trójkąta SOD lub AOS mamy $H^2+8^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2$. Stąd $H=4$.

Z trójkąta SOD otrzymujemy: $|OK|=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

<u>Schemat oceniania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania ……………………………………………………………..1 pkt

Zauważenie, że spodek wysokości ostrosłupa jest środkiem krawędzi AB podstawy i ściana boczna ABS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………………………..2 pkt

Wyznaczenie długości ramienia trapezu: $|BC|=|AD|=8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania………………………………………………..3 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $H=4$ i poprawnie zinterpretowanie odległości spodka wysokości od krawędzi bocznej SD.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ……………………………………….4 pkt

Obliczenie długości odcinka OK z błędami rachunkowymi.

Rozwiązanie pełne ………………………………………………………………………..5 pkt

Obliczenie długości odcinka OK: $|OK|=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Zadanie 15. (0–6)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{m^2+m-6}{m-5}x^2-(m-2)x+m-5$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

Rozwiązanie

Założenie $m\neq 5$.

Gdy $\frac{m^2+m-6}{m-5}=0$, czyli $(m+3)(m-2)=0$, a więc dla $m=-3$ lub $m=2$ funkcja jest liniowa i nie spełnia warunków zadania. Zatem $m\neq 5$, $m\neq -3$ i $m\neq 2$.

Wówczas funkcja f jest kwadratowa oraz:

- przyjmuje wartość największą, gdy $\frac{m^2+m-6}{m-5}<0$,
- ma dwa różne dwa różne miejsca zerowe wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta>0$,
- ma dwa miejsca zerowe o jednakowych znakach, gdy dodatkowo $x_1\cdot x_2>0$.

Rozwiązujemy nierówność $\frac{m^2+m-6}{m-5}<0$, otrzymując kolejno

$$\frac{m^2+m-6}{m-5}<0,$$
$$\frac{(m+3)(m-2)}{m-5}<0,$$
$$(m+3)(m-2)(m-5)<0.$$

Zatem $m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)$.

Rozwiązujemy nierówność $\Delta>0$, otrzymując kolejno

$$\left(-(m-2)\right)^2-4\cdot\frac{m^2+m-6}{m-5}\cdot(m-5)>0,$$
$$(m-2)^2-4\cdot\left(m^2+m-6\right)>0,$$
$$(m-2)^2-4\cdot(m+3)(m-2)>0,$$
$$(m-2)\left((m-2)-4(m+3)\right)>0,$$
$$(m-2)(m-2-4m-12)>0,$$
$$(m-2)(-3m-14)>0.$$

Zatem $-\frac{14}{3}<m<2$.

Rozwiązujemy nierówność $x_1\cdot x_2>0$. Możemy wykorzystać wzór Viète’a na iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego i wtedy nierówność ma postać

$$\frac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}}>0.$$

Rozwiązujemy tę nierówność, otrzymując kolejno

$$\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6}>0,$$

$$(m-5)^2(m-2)(m+3)>0,$$

$$m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)\cup(5,+\infty).$$

Otrzymaliśmy zatem $m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)$ i $m\in\left(-\frac{14}{3},2\right)$ i $m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$.

Stąd $m\in\left(-\frac{14}{3},-3\right)$. Jedyną liczą całkowitą z tego przedziału jest $m=-4$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

<u>Pierwszy etap</u> polega zapisaniu warunku, przy którym funkcja *f* jest kwadratowa i ma dwa różne pierwiastki, a następnie rozwiązaniu nierówności

$$\left(-(m-2)\right)^2-4\cdot\frac{m^2+m-6}{m-5}\cdot(m-5)>0:\ -\frac{14}{3}<m<2.$$

Za poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta>0$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

<u>Uwaga</u>

Jeżeli zdający zapisze $\Delta\ge 0$, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

<u>Drugi etap</u> polega na zapisaniu warunku, przy którym funkcja kwadratowa *f* przyjmuje wartość największą: $\frac{m^2+m-6}{m-5}<0$

oraz ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach: $\dfrac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}}>0$.

Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

- Za rozwiązanie nierówności $\frac{m^2+m-6}{m-5}<0$: $m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)$ zdający otrzymuje **2 punkty.**

- Za rozwiązanie nierówności $x_1\cdot x_2>0$ zdający otrzymuje **2 punkty**.

Przy czym w tej części:

1 punkt zdający otrzymuje za zapisanie wyrażenia $x_1\cdot x_2$ w postaci $\dfrac{m-5}{\frac{m^2+m-6}{m-5}}$,

2 punkty zdający otrzymuje za rozwiązanie nierówności $\frac{(m-5)^2}{m^2+m-6}>0$:

$$m\in(-\infty,-3)\cup(2,5)\cup(5,+\infty)$$

Trzeci etap polega na wyznaczeniu części wspólnej rozwiązań nierówności z etapu pierwszego i drugiego oraz podaniu liczby całkowitej spełniającej warunki zadania: $m = -4$.

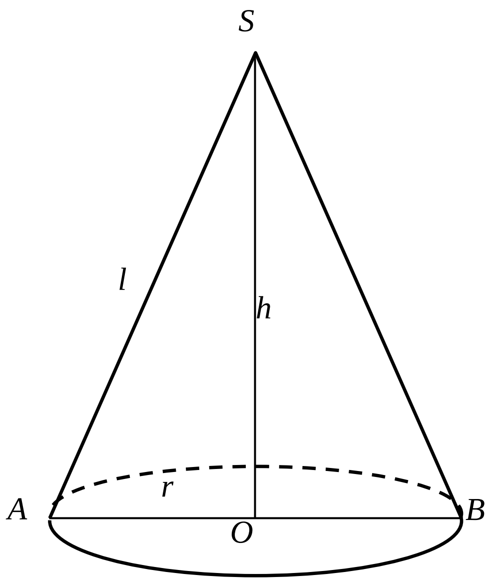
Za tę część rozwiązania zdający może otrzymać **1 punkt**.

Uwaga
Za ostatni etap **1 punkt** przyznajemy jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I, rozwiąże nierówność i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II albo gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże co najmniej jedną nierówność z etapu II i poda wszystkie całkowite wartości parametru *m,* dla których są spełnione warunki zadania.

Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

Przykładowe rozwiązanie (I sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że $l + r = 2$, skąd $l = 2 - r$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AOS* otrzymujemy $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$, czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd $h = \sqrt{l^2 - r^2}$. Ale $l = 2 - r$, więc

$$h = \sqrt{(2-r)^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r + r^2 - r^2} = \sqrt{4 - 4r} = 2\sqrt{1-r}.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 2\sqrt{1-r} = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot \sqrt{1-r} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{r^4(1-r)}.$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej *r* i jest określona wzorem

$$V(r)=\frac{2}{3}\pi\sqrt{r^4(1-r)}=\frac{2}{3}\pi\sqrt{r^4-r^5}\ .$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że $0<r<1$, a więc dziedziną funkcji *V* jest przedział $(0,1)$.

Rozważmy funkcję $f(r)=r^4-r^5$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej *r*.

Pochodna funkcji *f* jest równa

$$f'(r)=4r^3-5r^4=r^3(4-5r).$$

Miejscami zerowymi pochodnej są $r=0$ lub $r=\frac{4}{5}$.

Pochodna funkcji jest ujemna dla $r\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$, a dodatnia dla $r\in\left(0,\frac{4}{5}\right)$.

Zatem w przedziale $\left(0,\frac{4}{5}\right\rangle$ funkcja *V* jest rosnąca, a w przedziale $\left\langle\frac{4}{5},1\right)$ malejąca. W punkcie $r=\frac{4}{5}$ osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$$V\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{3}\pi\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\sqrt{\left(1-\frac{4}{5}\right)}=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{16}{25}\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{32\sqrt{5}}{375}\pi\ .$$

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie wysokości stożka jako funkcji zmiennej *r*: $h=\sqrt{4-4r}$,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej: $V(r)=\frac{2}{3}\pi r^2\sqrt{1-r}$
- określenie dziedziny funkcji: $0<r<1$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

<u>**Uwaga**</u>

Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę cześć **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f(r)=r^4-r^5$: $f'(r)=4r^3-5r^4$
- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $r=0$ lub $r=\frac{4}{5}$
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja *V* posiada wartość największą dla $r=\frac{4}{5}$.

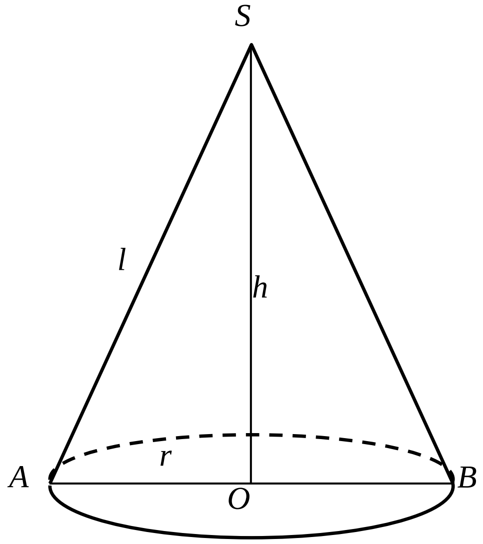
Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (**1 punkt**) – końcowe obliczenia.

Obliczenie objętości stożka dla $r = \frac{4}{5}$: $V\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$.

Uwaga
Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.

Przykładowe rozwiązanie (II sposób)
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z warunków zadania wynika, że $l + r = 2$, skąd $l = 2 - r$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy $|AS|^2 = |AO|^2 + |OS|^2$, czyli

$$l^2 = r^2 + h^2.$$

Stąd $r^2 = l^2 - h^2$. Ale $l = 2 - r$, więc

$$r^2 = (2-r)^2 - h^2,$$
$$r^2 = 4 - 4r + r^2 - h^2,$$
$$4r = 4 - h^2,$$
$$r = 1 - \frac{1}{4}h^2.$$

Objętość stożka jest więc równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \frac{1}{4}h^2\right)^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{16}h^4\right)\cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Objętość jest zatem funkcją zmiennej h i jest określona wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(h - \frac{1}{2}h^3 + \frac{1}{16}h^5\right).$$

Z warunków geometrycznych zadania wynika, że $0 < h < 2$, a więc dziedziną funkcji V jest przedział $(0, 2)$.

Rozważmy funkcję $f\left(h\right)=h-\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{16}h^5$ określoną dla każdej liczby rzeczywistej *h*.

Pochodna funkcji *f* jest równa

$$f'\left(h\right)=1-\frac{3}{2}h^2+\frac{5}{16}h^4.$$

Miejscami zerowymi pochodnej są $h=-2$ lub $h=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h=2$.

Pochodna funkcji jest ujemna dla $h\in\left(-2,-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},2\right)$, a dodatnia dla

$h\in\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$.

Zatem w przedziale $\left(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right\rangle$ funkcja *V* jest rosnąca, a w przedziale $\left\langle\frac{2\sqrt{5}}{5},2\right)$ malejąca.

W punkcie $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą jej wartością. Wartość ta jest równa

$V\left(h\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(h-\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{16}h^5\right)$

$$V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^3+\frac{1}{16}\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^5\right)=\frac{32\sqrt{5}}{375}\pi .$$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

a) Pierwszy etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- zapisanie promienia podstawy stożka jako funkcji zmiennej *h*: $r=1-\frac{1}{4}h^2$,
- zapisanie objętości stożka jako funkcji jednej zmiennej:
  $V\left(h\right)=\frac{\pi}{3}\cdot\left(h-\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{16}h^5\right)$
- określenie dziedziny funkcji: $0<h<2$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

<u>Uwaga</u>
Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę cześć **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

b) Drugi etap (3 punkty) składa się z trzech części:

- wyznaczenie pochodnej funkcji $f\left(h\right)=h-\frac{1}{2}h^3+\frac{1}{16}h^5$: $f'\left(h\right)=1-\frac{3}{2}h^2+\frac{5}{16}h^4$

- obliczenie miejsc zerowych pochodnej: $h=-2$ lub $h=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ lub $h=2$.
- uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V posiada wartość największą dla $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

c) Trzeci etap (**1 punkt**) – końcowe obliczenia.

Obliczenie objętości stożka dla $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$: $V\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{32\sqrt{5}}{375}\pi$.

Uwaga

Punkty za realizację danego etapu przyznajemy tylko wówczas, gdy zdający rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.