

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

**MATEMATYKA**

**POZIOM ROZSZERZONY**

**FORMUŁA OD 2015**

**(„NOWA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-R1**

**CZERWIEC 2019**

**Klucz punktowania zadań zamkniętych**

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	C	C	A	D

**Klucz punktowania zadań kodowanych**

<b>Zad 5.</b>		
3	7	5

**Zadanie 5. (0–2)**

W urnie znajduje się 16 kul, które mogą się różnić wyłącznie kolorem. Wśród nich jest 10 kul białych i 6 kul czarnych. Z tej urny losujemy dwukrotnie jedną kulę bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych.

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

**Rozwiązanie**

Obliczamy prawdopodobieństwo wylosowania dwukrotnie kuli białej

$$p = \frac{10 \cdot 9}{16 \cdot 15} = \frac{90}{240} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

Kodujemy cyfry: 3, 7, 5.

**Schemat oceniania rozwiązania zadania z kodowaną odpowiedzią**

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zakoduje cyfry: 3, 7, 5.

**Zadanie 6. (0–3)**

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

**Rozwiązanie**

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka;  
lub
- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka. Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki. Stosując regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$$

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki. Stosując kolejny raz regułę mnożenia otrzymujemy:

$$7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$$

Teraz stosujemy regułę dodawania

$$42 + 105 = 147$$

**Odpowiedź:** Wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28, jest 147.

### **Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze jeden z dwóch przypadków:

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka

albo

- naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z zestawu cyfr: cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze oba przypadki, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28, może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka

**oraz**

gdy obliczy dla jednego z dwóch przypadków, ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr:

- pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka: 42

albo

- cztery jedynki, dwie dwójki i jedna siódemka: 105.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym, jest równy 28.

**Zadanie 7. (0–2)**

Dana jest funkcja  $f$  określona wzorem  $f(x) = \frac{25x^2 - 9}{x^2 + 2}$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Oblicz wartość  $f'(10)$  pochodnej tej funkcji dla argumentu 10.

**Rozwiązanie**

Obliczamy pochodną funkcji  $f$ . Pochodna ta jest określona wzorem:

$$f'(x) = \frac{118x}{(x^2 + 2)^2}, \text{ zatem } f'(10) = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601} \approx 0,113417.$$

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy wyznaczył pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = \frac{118x}{(x^2 + 2)^2}$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczył wartość wyznaczonej pochodnej dla argumentu  $x = 10$ :

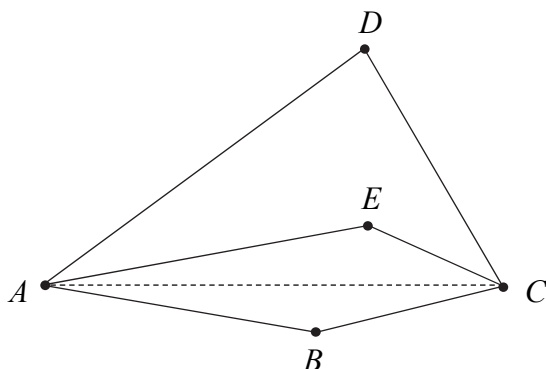
$$f'(10) = \frac{1180}{10404} = \frac{295}{2601} \approx 0,113417.$$

**Uwaga**

Jeżeli zdający błędnie obliczy pochodną funkcji, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**, z wyjątkiem przypadku popełnienia identyfikowalnego błędu rachunkowego, kiedy może otrzymać 1 punkt.

**Zadanie 8. (0–3)**

Dwusieczne kątów  $BAD$  i  $BCD$  czworokąta wypukłego  $ABCD$  przecinają się w punkcie  $E$ , przy czym punkty  $B$  i  $E$  leżą po przeciwnych stronach prostej  $AC$  (zobacz rysunek).

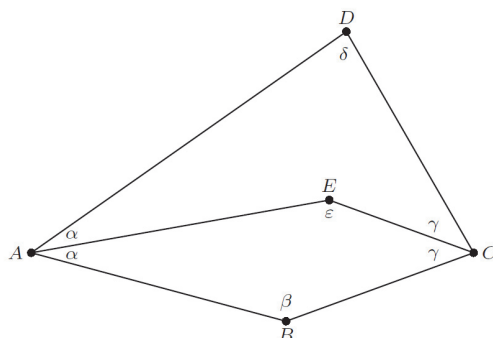


Wykaż, że  $|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$ .

**Rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia:

$\alpha = |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle DAE|$ ,  $\beta = |\sphericalangle ABC|$ ,  $\gamma = |\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle DCE|$ ,  $\delta = |\sphericalangle ADC|$ ,  $\varepsilon = |\sphericalangle AEC|$ , gdzie  $\varepsilon$  jest kątem wypukłym, tzn. kątem wewnętrznym czworokąta  $ABCE$ .



Ponieważ suma kątów czworokąta jest równa  $360^\circ$ , więc:

z czworokąta  $ABCE$  mamy równość  $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$ ,

z czworokąta  $AECD$  mamy równość  $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$ .

Po odjęciu tych równości stronami otrzymujemy:

$$\beta + \varepsilon - 360^\circ + \varepsilon - \delta = 0,$$

czyli

$$\beta - \delta + 2\varepsilon = 360^\circ.$$

To kończy dowód.

Ten sam dowód można zapisać wprost, bez przyjmowania dodatkowych oznaczeń.

Z czworokąta  $ABCE$  dostajemy równość

$$|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ.$$

Z czworokąta  $AECD$  dostajemy równość

$$|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ.$$

Po odjęciu tych równości stronami i uwzględnieniu równości  $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAD|$  oraz

$|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD|$ , otrzymujemy równość

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle AEC| - 360^\circ + |\sphericalangle AEC| - |\sphericalangle ADC| = 0^\circ,$$

czyli

$$|\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ADC| + 2 \cdot |\sphericalangle AEC| = 360^\circ.$$

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

- Zdający zapisze jedną z równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn.  
 $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$  lub  $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$

lub

- zdający zapisze jedną z równości:  $|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$  lub  
 $|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

- Zdający zapisze obie równości wynikające z sumy kątów czworokąta, tzn.  
 $\alpha + \beta + \gamma + \varepsilon = 360^\circ$  oraz  $\alpha + (360^\circ - \varepsilon) + \gamma + \delta = 360^\circ$

lub

- zdający zapisze równości:  $|\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle BCE| + |\sphericalangle AEC| = 360^\circ$  oraz  
 $|\sphericalangle EAD| + (360^\circ - |\sphericalangle AEC|) + |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle ADC| = 360^\circ$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający odejmie te równości stronami z uwzględnieniem równości  $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle EAD|$  oraz  $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle ECD|$ .

**Zadanie 9. (0–3)**

Udowodnij, że dla każdej liczby nieparzystej  $n$  wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 19$  jest podzielne przez 16.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Przekształcamy wyrażenie równoważnie w następujący sposób

$$\begin{aligned} n^5 - 3n^4 - n + 19, \\ n^5 - 3n^4 - n + 3 + 16, \\ n^4 \cdot (n-3) - (n-3) + 16, \\ (n^4 - 1) \cdot (n-3) + 16, \\ (n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3) + 16, \\ (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3) + 16 \end{aligned}$$

Z założenia liczba  $n$  jest nieparzysta, więc liczby:  $(n-1)$ ,  $(n+1)$ ,  $(n^2 + 1)$ ,  $(n-3)$  są parzyste.

Oznacza to, że ich iloczyn jest podzielny przez  $2^4$ . Zatem wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 19$  jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16, a więc jest podzielne przez 16.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**

gdy zapisze wyrażenie w postaci:  $(n^4 - 1) \cdot (n-3) + 16$ .

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy zapisze nierówność w postaci:  $(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3) + 16$  i nie uzasadni podzielności przez 16.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Rozwiązanie (II sposób)**

Ponieważ liczba  $n$  jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci  $2k+1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą.

Zatem wyrażenie  $n^5 - 3n^4 - n + 19$  przyjmuje postać:  $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$ .

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy

$$32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16.$$

Stąd wynika, że wyrażenie  $32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16$  możemy zapisać w postaci iloczynu  $16 \cdot (2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$ , który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby  $(2k^5 + 2k^4 - k^3 - 2k^2 - k + 1)$  jest podzielny przez 16.



**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Zdający otrzymuje ..... 1 p.**gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie  $(2k+1)^5 - 3(2k+1)^4 - (2k+1) + 19$  i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażień.

$$(2k+1)^5 = 32k^5 + 80k^4 + 80k^3 + 40k^2 + 10k + 1 \text{ lub}$$

$$(2k+1)^4 = 16k^4 + 32k^3 + 24k^2 + 8k + 1.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**gdy doprowadzi wyrażenie do postaci  $32k^5 + 32k^4 - 16k^3 - 32k^2 - 16k + 16$  i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Zadanie 10. (0–4)**Miara kąta wewnętrznego  $n$ -kąta foremnego jest o  $2^\circ$  mniejsza od miary kąta wewnętrznego  $(n+2)$ -kąta foremnego. Oblicz  $n$ .**Rozwiązanie**Suma miar kątów wewnętrznych  $n$ -kąta foremnego jest równa  $(n-2) \cdot 180^\circ$ , więc miarajednego kąta wewnętrznego tego  $n$ -kąta jest równa  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ .Tak samo wyznaczamy miarę kąta wewnętrznego  $(n+2)$ -kąta foremnego.Jest ona równa  $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2}$ .

Stąd i z treści zadania otrzymujemy równanie

$$\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} + 2^\circ,$$

$$\frac{90n}{n+2} = \frac{90(n-2)}{n} + 1,$$

$$90n^2 = 90(n-2)(n+2) + n(n+2),$$

$$90n^2 = 90n^2 - 360 + n^2 + 2n,$$

$$n^2 + 2n + 1 - 361 = 0,$$

$$(n+1)^2 - 19^2 = 0,$$

$$(n+1-19)(n+1+19) = 0,$$

$$(n-18)(n+20) = 0,$$

$$n = 18 \text{ lub } n = -20.$$

Liczba  $n$  jest naturalna, więc  $n = 18$ .

**Schemat oceniania****Zdający otrzymuje ..... 1 p.**gdy zapisze wyrazi miarę kąta wewnętrznego  $n$ -kąta lub  $(n+2)$ -kąta foremnego w zależnościod  $n$ : np.  $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ ,  $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2}$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**gdy zapisze równanie z niewiadomą  $n$ , wynikające z porównania miar kątów wewnętrznychwielokątów:  $\frac{n \cdot 180^\circ}{n+2} = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} + 2^\circ$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**gdy zapisze równanie kwadratowe z niewiadomą  $n$  w postaci:  $an^2 + bn + c = 0$ , np.:

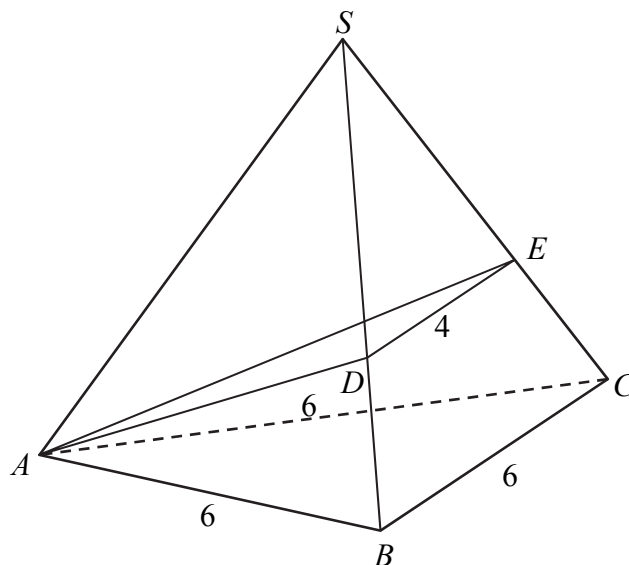
$$n^2 + 2n - 360 = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 4 p.**gdy obliczy liczbę wierzchołków  $n$ -kąta foremnego:  $n = 18$ .

**Zadanie 11. (0–6)**

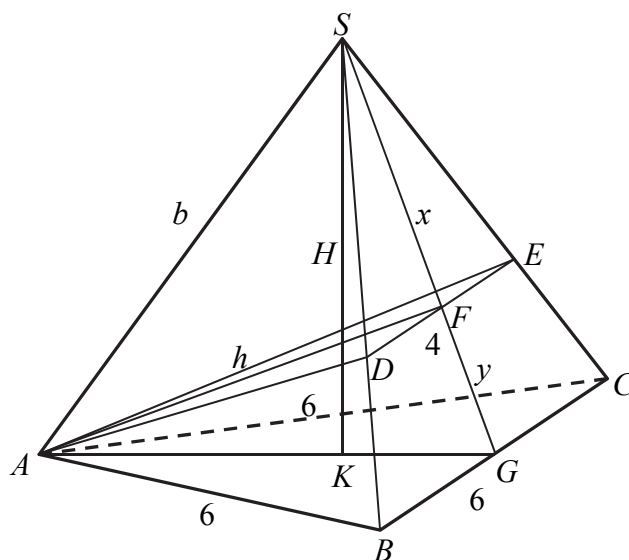
Podstawą ostrosłupa prawidłowego  $ABCS$  jest trójkąt równoboczny  $ABC$  o boku długości 6. Na krawędziach bocznych  $BS$  i  $CS$  wybrano punkty, odpowiednio  $D$  i  $E$ , takie że  $|BD| = |CE|$  oraz  $|DE| = 4$  (zobacz rysunek). Płaszczyzna  $ADE$  jest prostopadła do płaszczyzny ściany bocznej  $BCS$  ostrosłupa.



Oblicz objętość tego ostrosłupa.

**Rozwiązanie**

Wprowadźmy oznaczenia:  $|AF| = h$ ,  $|SF| = x$ ,  $|FG| = y$ ,  $|AS| = |BS| = |CS| = b$ ,  $|SK| = H$ , jak na rysunku.



Z podobieństwa trójkątów  $DES$  i  $BCS$  otrzymujemy równanie  $\frac{x}{4} = \frac{x+y}{6}$ . Stąd  $x = 2y$ .

W trójkącie równobocznym  $ABC$  mamy:  $|AG| = 3\sqrt{3}$ ,  $|AK| = 2\sqrt{3}$ ,  $|KG| = \sqrt{3}$ .

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 9y^2 + 9 = b^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami pierwsze i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ h^2 - 5y^2 = 9 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie

$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 6y^2 = 18 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy  $y = \sqrt{3}$ . Zatem  $|SG| = 3\sqrt{3}$ . Obliczamy wysokość i objętość ostrosłupa

$$H = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3} = 2\sqrt{6} \quad \text{oraz} \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{36\sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}.$$

### Uwagi

1. Zależność  $y = \sqrt{3}$  można wyznaczyć też wykorzystując podobieństwo trójkątów  $AFG$  i  $SKG$  (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $G$ ). Stąd otrzymujemy

$$\frac{|FG|}{|AG|} = \frac{|KG|}{|SG|}$$

$$\frac{y}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3y}$$

Stąd  $3y^2 = 3(\sqrt{3})^2$ , więc  $y = \sqrt{3}$ . Zatem  $|SG| = 3y = 3\sqrt{3}$ .

2. Zdający może skorzystać z podobieństwa trójkątów  $SDF$  i  $SBG$ , czyli „połówek trójkątów”  $SDE$  i  $BCS$ .

### Schemat oceniania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- wykorzysta podobieństwo trójkątów  $DES$  i  $BCS$  i zapisze równanie  $\frac{x}{4} = \frac{x+y}{6}$ .

albo

- zapisze zależności wynikające z własności trójkąta równobocznego  $ABC$ :  $|AG| = 3\sqrt{3}$ ,  
 $|AK| = 2\sqrt{3}$ ,  $|KG| = \sqrt{3}$ ,

albo

- zapisze skalę podobieństwa trójkątów  $SDE$  i  $SBC$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 3 p.**

Zdający zapisze układ równań pozwalający obliczyć długości odcinków potrzebnych do

obliczenia wysokości ostrosłupa, np.: 
$$\begin{cases} h^2 + 4y^2 = b^2 \\ h^2 + y^2 = 27 \\ 9y^2 + 9 = b^2 \end{cases}$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 4 p.**

Zdający obliczy długość odcinka  $|SG| = 3\sqrt{3}$ .

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 5 p.**

Zdający obliczy wysokość ostrosłupa  $H = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 3} = 2\sqrt{6}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający obliczy objętość ostrosłupa:  $V = 18\sqrt{2}$ .

#### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
  - a) zapisaniu proporcji z podobieństwa trójkątów,
  - b) zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
  - c) zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ ”,  
to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

**Zadanie 12. (0–6)**

Wyznacz wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których równanie

$$4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 = 0$$

ma dwa różne dodatnie rozwiązania  $x_1, x_2$  spełniające nierówność  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$ .

**Rozwiązanie (I sposób)**

Wyróżnik trójmianu kwadratowego  $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$  zmiennej  $x$  jest równy

$$\Delta = (2 - 4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36 > 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru  $m$  trójmian ten ma dwa różne pierwiastki

$$x_1 = \frac{4m-2-6}{2 \cdot 4} = \frac{m-2}{2}, \quad x_2 = \frac{4m-2+6}{2 \cdot 4} = \frac{m+1}{2}.$$

Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{m-2}{2} > 0 \text{ i } \frac{m+1}{2} > 0,$$

$$m > 2 \text{ i } m > -1,$$

$$m > 2.$$

Nierówność  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$  możemy więc zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 &\leq \frac{17}{4}, \\ m^2 + 2m + 1 + m^2 - 4m + 4 &\leq 17, \\ 2m^2 - 2m - 12 &\leq 0, \\ m^2 - m - 6 &\leq 0, \\ (m+2)(m-3) &\leq 0, \end{aligned}$$

więc

$$m \in \langle -2, 3 \rangle.$$

Uwzględniając warunek  $m > 2$ , otrzymujemy  $m \in (2, 3)$ .

**Uwaga 1.**

Pierwiastki trójmianu kwadratowego  $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$  zmiennej  $x$  możemy wyznaczyć, rozkładając ten trójmian na czynniki w następujący sposób

$$\begin{aligned} 4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2 &= 4x^2 + 2x - 4mx + m^2 - m - 2 = \\ &= 4x^2 - 2mx + 4x - 2mx - 2x + m^2 - 2m - 2x + m - 2 = \\ &= 2x(2x - m + 2) - m(2x - m + 2) - (2x - m + 2) = \\ &= (2x - m - 1)(2x - m + 2) = 4\left(x - \frac{m+1}{2}\right)\left(x - \frac{m-2}{2}\right). \end{aligned}$$

To oznacza, że dla każdej wartości parametru  $m$  trójmian ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$x_1 = \frac{m-2}{2}, \quad x_2 = \frac{m+1}{2}.$$

**Uwaga 2.**

Aby wyznaczyć zbiór tych wartości parametru  $m$ , dla których oba pierwiastki trójmianu kwadratowego  $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$  zmiennej  $x$  są dodatnie wystarczy zauważyć, że  $x_1 = \frac{m-2}{2} < \frac{m+1}{2} = x_2$ , więc wystarczy, żeby spełniona była nierówność  $\frac{m-2}{2} > 0$ , czyli  $m > 2$ .

**Uwaga 3.**

Możemy też zauważyć, że oba istniejące pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy  $f(0) > 0$  i  $x_w > 0$ , gdzie  $f(x) = 4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$ . Otrzymujemy wtedy układ nierówności z niewiadomą  $m$

$$m^2 - m - 2 > 0 \text{ i } \frac{4m-2}{2 \cdot 4} > 0$$

$$(m-2)(m+1) > 0 \text{ i } m > \frac{1}{2}$$

$$m-2 > 0 \text{ i } m > \frac{1}{2}$$

$$m > 2.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru  $m$  istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste:  $\Delta = 36 > 0$ , więc równanie ma dla każdej wartości parametru  $m$  dwa rozwiązania.

Za poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozkłada trójmian  $4x^2 + (2 - 4m)x + m^2 - m - 2$  na czynniki i otrzymuje postać, w której wszystkie składniki mają ten sam czynnik, np.:

$2x(2x - m + 2) - m(2x - m + 2) - (2x - m + 2)$ , to takie działanie jest odpowiednikiem realizacji pierwszego etapu rozwiązania i zdający otrzymuje wtedy **1 punkt**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu

- wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których oba pierwiastki są dodatnie

oraz

- wyznaczeniu tych wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których spełniony jest warunek  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$

Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za wyznaczenie pierwiastków w zależności od  $m$ :  $x_1 = \frac{m-2}{2}$ ,  $x_2 = \frac{m+1}{2}$  zdający otrzymuje

**1 punkt**.

Za zapisanie układu nierówności  $\frac{m-2}{2} > 0$  i  $\frac{m+1}{2} > 0$  oraz jego rozwiązanie  $m \in (2, +\infty)$

zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający ustali, że oba pierwiastki trójmianu kwadratowego są dodatnie, gdy  $f(0) > 0$  i  $x_w > 0$ , to otrzymuje **1 punkt** za realizację II etapu.

Jeżeli dodatkowo zdający wyznaczy poprawnie wszystkie wartości  $m$ , które spełniają te dwa warunki, to otrzymuje **2 punkty** za realizację II etapu.

Za zapisanie nierówności  $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4}$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

Za rozwiązanie nierówności  $\left(\frac{m+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m-2}{2}\right)^2 \leq \frac{17}{4} : m \in \langle -2, 3 \rangle$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Trzeci etap** rozwiązania polega na wyznaczeniu wartości parametru  $m$  z uwzględnieniem wszystkich warunków

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań  $m \in (2, 3)$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Rozwiązanie** (II sposób)

Wyróżnik trójmianu kwadratowego  $4x^2 + (2-4m)x + m^2 - m - 2$  zmiennej  $x$  jest równy

$$\Delta = (2-4m)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (m^2 - m - 2) = 4 - 16m + 16m^2 - 16m^2 + 16m + 32 = 36 > 0.$$

Zatem dla każdej wartości parametru  $m$  trójmian ten ma dwa różne pierwiastki  $x_1, x_2$ .

Oba pierwiastki są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 > 0 \text{ i } x_1 \cdot x_2 > 0, \\ \frac{4m-2}{2} > 0 \text{ i } \frac{m^2-m-2}{2} > 0, \\ 4m > 2 \text{ i } m^2 - m - 2 > 0, \\ m > \frac{1}{2} \text{ i } (m-2)(m+1) > 0, \\ m > \frac{1}{2} \text{ i } m-2 > 0, \\ m > 2. \end{aligned}$$

Nierówność  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 &\leq \frac{17}{4}, \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 &\leq \frac{17}{4}. \end{aligned}$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\frac{4m-2}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2-m-2}{4} &\leq \frac{17}{4}, \\ 4m^2 - 4m + 1 - 2(m^2 - m - 2) &\leq 17, \\ 2m^2 + 2m - 12 &\leq 0 \\ m^2 + m - 6 &\leq 0, \\ (m+2)(m-3) &\leq 0. \end{aligned}$$

więc

$$m \in \langle -2, 3 \rangle.$$

Uwzględniając warunek  $m > 2$ , otrzymujemy  $m \in (2, 3)$ .

### Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów, każdy etap polega na zapisaniu i rozwiązaniu nierówności lub układu nierówności z niewiadomą  $m$ . W efekcie zdający musi rozwiązać cztery nierówności z niewiadomą  $m$ .

**Pierwszy etap** polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru  $m$  istnieją dwa różne pierwiastki rzeczywiste:  $\Delta = 36 > 0$ , więc równanie ma dla każdej wartości parametru  $m$  dwa rozwiązania.



Za poprawne rozwiązanie nierówności  $\Delta > 0$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Drugi etap

Zapisanie nierówności  $x_1 x_2 > 0$  w postaci . Za poprawne rozwiązanie tej nierówności  $m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

1.  $x_1 + x_2 > 0$ . Za poprawne rozwiązanie tej nierówności  $m \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$  zdający otrzymuje **1 punkt**.
2.  $x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{17}{4}$ . Za poprawne rozwiązanie tej nierówności zdający otrzymuje **2 punkty**.

Przy czym za przekształcenie nierówności do postaci  $\left(\frac{4m-2}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{m^2 - m - 2}{4} \leq \frac{17}{4}$  otrzymuje **1 punkt**.

### Trzeci etap

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań  $m \in (2, 3)$  zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający stosuje nieistniejącą zależność: „suma kwadratów = kwadrat sumy”, prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, to otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Za trzeci etap rozwiązania (zapisanie części wspólnej zbiorów rozwiązań otrzymanych nierówności) zdający może otrzymać 1 punkt tylko wtedy, gdy spełnione są jednocześnie następujące warunki:

- a)  $Z_i \neq \emptyset$  dla każdego  $i = 0, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$ ;
- b)  $Z_i \neq \mathbb{R}$  dla każdego  $i = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$ ;
- c)  $\sim (Z_i \subset Z_j)$  dla każdego  $i \neq j$  oraz  $i, j = 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3$  poza inkluzją  $Z_{1_1} \subset Z_{2_1}$ , która jest prawdziwa.

W powyższych zapisach:

$Z_0 = \mathbb{R}$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $\Delta(m) > 0$ ;

$Z_{1_1} = (2, +\infty)$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $x_1(m) > 0$ ;

$Z_{1_2} = (-1, +\infty)$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $x_2(m) > 0$ ;

$Z_3 = \langle -2, 3 \rangle$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $(x_1^2 + x_2^2)(m) \leq \frac{17}{4}$ ;

$Z_{2_1} = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $(x_1 + x_2)(m) > 0$ ;

$Z_{2_2} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$  oznacza zbiór rozwiązań nierówności  $(x_1 \cdot x_2)(m) > 0$ .

**Zadanie 13. (0–6)**

Punkt  $A = (-2, 6)$  jest wierzchołkiem rombu  $ABCD$  o polu 90. Przekątna  $BD$  zawiera się w prostej  $l$  o równaniu  $2x - y - 5 = 0$ . Wyznacz długość boku tego rombu.

**Rozwiązanie (I sposób)**

Wyznaczamy równanie prostej  $k$  zawierającej przekątną  $AC$  rombu (prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $l$ , punkt  $A$  leży na prostej  $k$ ).

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań  $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$  wyznaczamy współrzędne punktu  $S = (4, 3)$  (środek symetrii

rombu). Punkt  $S$  jest jednocześnie środkiem przekątnej  $AC$ , co pozwala obliczyć długość

$$\text{przekątnej } AC: 2 \cdot |AS| = 2 \cdot \sqrt{(4+2)^2 + (3-6)^2} = 2 \cdot \sqrt{36+9} = 6\sqrt{5}.$$

Wykorzystujemy informację o polu rombu i obliczamy długość drugiej przekątnej.

$$\frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = 90$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \cdot |BD| = 90$$

$$|BD| = 6\sqrt{5}$$

Stwierdzamy, że rozważany romb jest kwadratem, którego przekątna ma długość  $6\sqrt{5}$ . Zatem

$$\text{bok kwadratu ma długość } \frac{6\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{10}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
gdy wyznaczy równanie prostej prostopadłej do prostej  $l$ , przechodzącej przez punkt  $A$ :

$$y = -\frac{1}{2}x + 5.$$

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**

gdy obliczy współrzędne punktu  $S$ :  $S = (4, 3)$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**

gdy obliczy długość  $|AS| = 3\sqrt{5}$ .

Uwaga: Jeżeli zdający obliczy  $|AS| = 3\sqrt{5}$  jako odległość punktu  $A$  od prostej  $l$  bez korzystania ze współrzędnych środka symetrii rombu i bez zapisania równania prostej prostopadłej do prostej  $l$ , to otrzymuje **3 punkty**.

**Zdający otrzymuje ..... 4 p.**

gdy obliczy długość przekątnej  $|BD| = 6\sqrt{5}$ .

**Zdający otrzymuje** ..... 5 p.

gdy zauważy, że rozważany romb jest kwadratem.

**Zdający otrzymuje** ..... 6 p.

gdy obliczy długość boku rombu:  $3\sqrt{10}$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający nie zapisze, że rozważany romb jest kwadratem, ale korzysta z tego faktu i poprawnie wyznacza długość boku kwadratu, to może otrzymać 6 punktów, o ile nie popełnia błędów na innych etapach rozwiązania.

### Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej  $k$  zawierającej przekątną  $AC$  rombu (prosta  $k$  jest prostopadła do prostej  $l$ , punkt  $A$  leży na prostej  $k$ ).

$$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Z układu równań  $\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$  wyznaczamy współrzędne punktu  $S = (4, 3)$  (środek symetrii

rombu). Zauważamy, że pole trójkąta  $ABS$  stanowi  $\frac{1}{4}$  pola rombu  $ABCD$  i jest równe 22,5.

Uwaga: Zdający może wyznaczyć współrzędne punktu  $C: C = (10, 0)$  i wyznaczyć współrzędne punktu  $B$  przy wykorzystaniu pola trójkąta  $ABC$ , które jest równe 45.

Przyjmujemy oznaczenia dla współrzędnych punktu  $B: B = (x_B, y_B)$ . Wyznaczamy

współrzędne wektorów  $\overrightarrow{AS}$  i  $\overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{AS} = [4 + 2, 3 - 6] = [6, -3], \quad \overrightarrow{AB} = [x_B + 2, y_B - 6].$$

Wyznaczamy pole trójkąta  $ABS$ :

$$P_{\Delta ABS} = \frac{1}{2} |6y_B - 36 + 3x_B + 6|$$

Punkt  $B$  leży na prostej  $l$ , więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.

Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} |6y_B + 3x_B - 30| = 45 \\ y_B = 2x_B - 5. \end{cases}$$

Otrzymujemy dwa przypadki:

$$15x_B - 60 = 45 \text{ lub } 15x_B - 60 = -45.$$

$$\text{Stąd } x_B = 7 \text{ lub } x_B = 1$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb  $(7, 9)$  oraz  $(1, -3)$ . Zauważamy, że takie same warunki, jak punkt  $B$ , spełnia punkt  $D$ . Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków  $B$  oraz  $D$ .

Uwaga: Zdający może rozwiązać tylko jeden przypadek, bo może uznać, że do policzenia długości boku rombu wystarczy wyznaczyć dowolny z dwóch sąsiednich dla  $A$  wierzchołków.

$$\text{Obliczamy długość odcinka } AB: |AB| = \sqrt{(7+2)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{81+9} = 3\sqrt{10}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... **1 p.**  
gdy wyznaczy równanie prostej

$$k : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

**Zdający otrzymuje** ..... **2 p.**  
gdy obliczy współrzędne punktu  $S$ :  $S = (4, 3)$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **3 p.**  
gdy wykorzysta wartość pola rombu i zapisze równanie z dwiema niewiadomymi – współrzędnymi wierzchołka rombu, np.:  $|6y_B + 3x_B - 30| = 45$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **4 p.**  
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą – współrzędną punktu  $B$ , np.:  
 $|12x_B - 30 + 3x_B - 30| = 45$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **5 p.**  
gdy obliczy współrzędne punktu  $B$ , np.:  $B = (7, 9)$ .

**Zdający otrzymuje** ..... **6 p.**  
gdy obliczy długość boku rombu:  $3\sqrt{10}$ .

**Uwagi**

- Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
- Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem nierachunkowym, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym:
  - ustaleniu współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej,
  - wyznaczeniu wyrazu wolnego w równaniu prostej prostopadłej,
  - zastosowaniu niepoprawnego wzoru na pole rombu lub pole trójkąta,
  - wyznaczeniu współrzędnych wektora,
  - zastosowaniu wzoru na odległość punktu od prostej,
  - zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa,
  - zastosowaniu nieistniejącego wzoru „ $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ ”
 to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty** za rozwiązanie całego zadania.

**Zadanie 14. (0–4)**Rozwiąż równanie  $4 \sin 7x \cos 2x = 2 \sin 9x - 1$  w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ .**Rozwiązanie I sposób**

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4 \sin 7x \cos 2x = 2 \sin 9x - 1$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = \sin 9x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$  mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30}, x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**Zdający zastosuje wzór  $\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ :  $x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30},$ 

$$x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

**Rozwiązanie II sposób**

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$4 \sin 7x \cos 2x = 2 \sin 9x - 1$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = \sin(7x + 2x) - \frac{1}{2}$$

$$2 \sin 7x \cos 2x = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x - \frac{1}{2}$$

$$\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 5x = -\frac{1}{2}$$

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k - \text{liczba całkowita.}$$

Zatem w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$  mamy następujące rozwiązania tego równania:

$$x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30}, x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**Zdający zapisze, równanie w postaci  $\sin 7x \cos 2x - \sin 2x \cos 7x = -\frac{1}{2}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**Zdający zapisze równanie w postaci równoważnej  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**Zdający zapisze wszystkie rozwiązanie równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  w zbiorze liczb rzeczywistych:

$$5x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } 5x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ :  $x = \frac{7\pi}{30}, x = \frac{19\pi}{30},$ 

$$x = \frac{11\pi}{30}, x = \frac{23\pi}{30}.$$

**Uwaga**

1. Jeżeli zdający przed uzyskaniem elementarnych równań trygonometrycznych popełnia jeden błąd, polegający na niepoprawnym zastosowaniu wzoru: na sumę sinusów lub na sinus sumy, to może otrzymać:

- co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 4 rozwiązania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ .

albo

- co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, o ile w rezultacie konsekwentnego postępowania otrzyma 2 serie rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych.

2. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  zdający zapisze serie dla kąta  $x$ , zamiast kąta  $5x$ , to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

3. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  zdający zapisze serie dla kąta  $5x$  i jedynym popełnionym przez niego błędem jest zapisanie niepoprawnej wielokrotności kąta  $\pi$ , to zdający może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie, ale tylko w przypadku, gdy wśród zapisanych rozwiązań co najmniej dwa znajdują się w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ .

4. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  zdający zapisze poprawnie tylko jedną serię dla kąta  $5x$  i dalej konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

5. Jeżeli przy rozwiązywaniu równania  $\sin 5x = -\frac{1}{2}$  zdający nie zapisze serii dla kąta  $5x$ , ale zapisze niepoprawne serie dla kąta  $x$ , i na tym zakończy, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

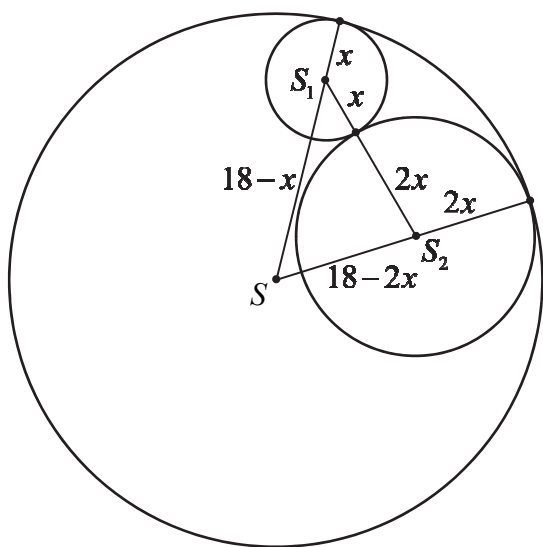
**Zadanie 15. (0–7)**

Dany jest okrąg o środku  $S$  i promieniu 18. Rozpatrujemy pary okręgów: jeden o środku  $S_1$  i promieniu  $x$  oraz drugi o środku  $S_2$  i promieniu  $2x$ , o których wiadomo, że spełniają jednocześnie następujące warunki:

- rozważane dwa okręgi są styczne zewnętrznie;
- obydwie rozważane okręgi są styczne wewnętrznie do okręgu o środku  $S$  i promieniu 18;
- punkty:  $S, S_1, S_2$  nie leżą na jednej prostej.

Pole trójkąta o bokach  $a, b, c$  można obliczyć ze wzoru Herona  $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , gdzie  $p$  – jest połową obwodu trójkąta.

Zapisz pole trójkąta  $SS_1S_2$  jako funkcję zmiennej  $x$ . Wyznacz dziedzinę tej funkcji i oblicz długości boków tego z rozważanych trójkątów, którego pole jest największe. Oblicz to największe pole.

**Rozwiązanie**

Z warunku styczności okręgów otrzymujemy równania:

$$|SS_1| = 18 - x,$$

$$|SS_2| = 18 - 2x,$$

$$|S_1S_2| = 2x + x = 3x.$$

Połowa obwodu trójkąta  $SS_1S_2$  jest równa  $p = \frac{18 - 2x + 18 - x + 2x + x}{2} = 18$ .

Zatem pole tego trójkąta możemy zapisać jako funkcję zmiennej  $x$ , wzorem

$$P = \sqrt{18 \cdot 2x \cdot x \cdot (18 - 3x)} = \sqrt{108x^2(6 - x)}.$$

Dziedziną tej funkcji jest zbiór takich wartości  $x$ , że  $x \in (0, 6)$ . Wystarczy zbadać funkcję

$$f(x) = -x^3 + 6x^2. \text{ Pochodna tej funkcji jest równa } f'(x) = -3x^2 + 12x.$$

Obliczmy miejsca zerowe i zbadajmy znak pochodnej



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0, \text{ stąd } x = 0 \text{ lub } x = 4.$$

Uwzględniając dziedzinę funkcji mamy:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 4)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (4, 6)$$

Zatem funkcja  $f$  jest w przedziale  $(0, 4)$  rosnąca, a w przedziale  $(4, 6)$  malejąca.

Wynika stąd, że dla  $x = 4$  funkcja  $f$  ma maksimum lokalne, które jest jednocześnie jej największą wartością.

Długości boków trójkąta o największym polu wynoszą:

$$|SS_1| = 14,$$

$$|SS_2| = 10,$$

$$|S_1S_2| = 12.$$

$$\text{Oraz pole } P = \sqrt{108 \cdot 16 \cdot 2} = 24\sqrt{6}.$$

### **Schemat punktowania**

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

- **Pierwszy etap** składa się z trzech części:

a) zapisanie równań wynikających z warunku styczności okręgów,  $|SS_1| = 18 - x$ ,

$$|SS_2| = 18 - 2x, \quad |S_1S_2| = 2x + x = 3x,$$

b) zapisanie pola trójkąta jako funkcji zmiennej  $x$ :

$$P = \sqrt{108x^2(6-x)}$$

c) określenie dziedziny funkcji  $P$ :  $0 < x < 6$ .

Za każdą z części tego etapu zdający może otrzymać po **1 punkcie**.

### **Uwaga do etapu I**

Punkt za część trzecią (wyznaczenie dziedziny funkcji) zdający otrzymuje niezależnie od realizacji dwóch pierwszych części tego etapu, pod warunkiem, że rozważy wyznaczoną przez siebie funkcję jednej zmiennej.

- **Drugi etap** składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej funkcji  $f$ :  $f'(x) = -3x^2 + 12x$ ,

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej:  $x = 0$  lub  $x = 4$ .

c) wyznaczenie przedziałów monotoniczności funkcji  $f$  i uzasadnienie, że dla  $x = 4$  funkcja  $f$  osiąga największą wartość.

### **Uwagi do etapu II**

II. 1. Jeżeli zdający wyznaczy pochodną funkcji z błędem, ale wyznaczona pochodna ma postać funkcji kwadratowej, która ma dwa miejsca zerowe, w tym przynajmniej jedno w wyznaczonej dziedzinie funkcji, to zdający może otrzymać punkty za część 2. i 3. tego etapu, o ile konsekwentnie obliczy miejsca zerowe pochodnej lub uzasadni istnienie najmniejszej wartości rozważanej funkcji.

II. 2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak.

II. 3. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $x$ , przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający:

- opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji  $f$ ;
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $x$  funkcja  $f$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość. Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

- **Trzeci etap.**

Obliczenie długości boków i pola trójkąta  $|SS_1| = 14$ ,  $|SS_2| = 10$ ,  $|S_1S_2| = 12$ ,  $P = 24\sqrt{6}$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.