

**EGZAMIN MATURALNY**  
**W ROKU SZKOLNYM 2018/2019**

**MATEMATYKA**

**POZIOM ROZSZERZONY**

**FORMUŁA DO 2014**

**(„STARA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-R1**

**MAJ 2019**

*Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.*

### Zadanie 1. (0–5)

I. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (1.f). 4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu funkcji: dziedzinę i zbiór wartości, miejsca zerowe, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie, maleje, ma stały znak (4.b). Zdający sporządza wykres funkcji spełniającej podane warunki (4.c).
--	---

#### Schemat punktowania

**Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.

Zdający zapisze poprawnie zbiór wartości funkcji:  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 4 p.

Zdający zapisze poprawnie wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej oraz narysuje wykres funkcji  $f$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający

- zapisze poprawnie wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej we wszystkich trzech rozpatrywanych przedziałach

albo

- zapisze poprawnie wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w trzech

przypadkach:  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający

- zapisze poprawnie wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w dwóch spośród trzech rozpatrywanych przedziałów

albo

- zapisze poprawnie wzór funkcji bez użycia symbolu wartości bezwzględnej w dwóch

spośród trzech przypadków:  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- poprawnie wyznaczy trzy przedziały, w których rozpatruje wzór funkcji  $f$ :  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ .

albo

- zapisze cztery przypadki, w których rozpatruje wzór funkcji  $f$ :  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$ ,  $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popelnia błędy.

### Przykładowe rozwiązanie

Wzór funkcji  $f$  możemy zapisać bez użycia symbolu wartości bezwzględnej.

1) Dla  $x < -2$  otrzymujemy  $f(x) = \frac{-(x+2)}{x+2} - x + 3(-x+1) = -1 - x - 3x + 3 = -4x + 2$ .

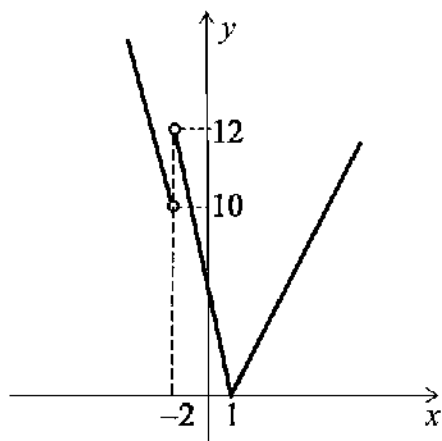
2) Dla  $-2 < x < 1$  otrzymujemy  $f(x) = \frac{x+2}{x+2} - x + 3(-x+1) = 1 - x - 3x + 3 = -4x + 4$ .

3) Dla  $x \geq 1$  otrzymujemy  $f(x) = \frac{x+2}{x+2} - x + 3(x-1) = 1 - x + 3x - 3 = 2x - 2$ .

Zatem

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & \text{dla } x \in (-\infty; -2) \\ -4x+4 & \text{dla } x \in (-2; 1) \\ 2x-2 & \text{dla } x \in (1; +\infty). \end{cases}$$

Możemy narysować wykres funkcji  $f$ .



Zbiorem wartości funkcji  $f$  jest przedział  $(0, +\infty)$ .

**Zadanie 2. (0–3)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne; skraca i rozszerza wyrażenia wymierne (2.f).
--------------------------------	--

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze nierówność w postaci równoważnej:

$$\frac{(x-y)^2 + a(y-x)}{x(y+a)} > 0 \text{ lub } (x-y)^2 + a(y-x) > 0, \text{ lub } (x-y)^2 a(x-y)$$

albo

- zapisze, że wystarczy wykazać prawdziwość nierówności  $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y+a}{x+a} > 2$ , wykazując

$$\text{wcześniej prawdziwość nierówności } \frac{y}{x} > \frac{y+a}{x+a},$$

albo

- zapisze, że  $f'(a) > 0$  dla każdego  $a \geq 0$ , a ponadto zbada monotoniczność funkcji  $f$  i stwierdzi, że funkcja  $f$  jest rosnąca,

albo

- zapisze, że wykresem funkcji  $f(a) = \frac{x+a}{y+a} - \frac{y}{x} - 2$  określonej dla  $a \neq -y$  jest hiperbola, której asymptotą poziomą jest, w układzie współrzędnych  $aOb$ , prosta o równaniu  $b = \frac{y}{x} - 1$ , natomiast asymptotą pionową jest prosta o równaniu  $a = -y$  oraz zapisze, że w przedziale  $\langle 0, +\infty \rangle$  funkcja  $f$  jest rosnąca.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze nierówność w postaci równoważnej:

$$\frac{x^2 + ax + y^2 + ay - 2xy - 2ax}{x(y+a)} > 0 \text{ lub } x^2 + ax + y^2 + ay - 2xy - 2ax > 0, \text{ lub}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 a(x-y)$$

albo

- wykaże, że dla dowolnych liczb  $0 < x < y$  i  $a > 0$  prawdziwa jest nierówność

$$\frac{y}{x} > \frac{y+a}{x+a},$$

albo

- wyznaczy pochodną funkcji  $f(a) = \frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} - 2$ :  $f'(a) = \frac{y-x}{(y+a)^2}$ ,

albo

- zapisze, że wykresem funkcji  $f(a) = \frac{x+a}{y+a} - \frac{y}{x} - 2$  określonej dla  $a \neq -y$  jest hiperbola, której asymptotą poziomą jest, w układzie współrzędnych  $aOb$ , prosta o równaniu  $b = \frac{y}{x} - 1$ , natomiast asymptotą pionową jest prosta o równaniu  $a = -y$ .

### Uwaga

Jeżeli zdający prowadzi do końca rozumowanie opisane w zamieszczonym poniżej III sposobie rozwiązania, pomijając uzasadnienie prawdziwości nierówności  $\frac{y}{x} > \frac{y+a}{x+a}$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Nierówność możemy przekształcić w sposób równoważny

$$\begin{aligned} \frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} - 2 &> 0, \\ \frac{x(x+a) + y(y+a) - 2x(y+a)}{x(y+a)} &> 0, \\ \frac{x^2 + ax + y^2 + ay - 2xy - 2ax}{x(y+a)} &> 0, \\ \frac{(x-y)^2 + a(y-x)}{x(y+a)} &> 0. \end{aligned}$$

Z założenia  $y > 0$ ,  $x > 0$  i  $a > 0$ . Zatem  $y+a > 0$  i  $x > 0$ , co oznacza, że mianownik ułamka stojącego po lewej strony otrzymanej nierówności jest dodatni. Kwadrat  $(x-y)^2$  jest nieujemny, a z założenia  $x < y$  wynika, że  $y-x > 0$ , więc  $a(y-x) > 0$ . Stąd licznik rozważanego ułamka jest dodatni. W rezultacie otrzymana nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.

#### II sposób

Z założenia wynika, że  $y > 0$ ,  $x > 0$  i  $a > 0$ . Zatem  $y+a > 0$ . Mnożąc obie strony nierówności

$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$  przez liczbę dodatnią  $(y+a)x$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} x(x+a) + y(y+a) &> 2x(y+a), \\ x^2 + ax + y^2 + ay - 2xy - 2ax &> 0, \\ (x-y)^2 + a(y-x) &> 0. \end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa, gdyż  $(x-y)^2 > 0$  oraz  $a(y-x) > 0$ , bo z założenia  $x < y$  i  $a > 0$ . To kończy dowód.

### III sposób

Wykażemy najpierw, że jeżeli licznik i mianownik ułamka większego od 1 zwiększymy o tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy ułamek mniejszy od wyjściowego, gdyż przy założeniu, że liczby  $x, y$  i  $a$  są dodatnie, nierówność  $\frac{y+a}{x+a} < \frac{y}{x}$  jest równoważna kolejno nierównościom

$$x(y+a) < y(x+a),$$

$$xy + xa < xy + ya,$$

$$xa < ya,$$

$$x < y$$

$$1 < \frac{y}{x},$$

co jest prawdą.

Zatem  $\frac{y}{x} > \frac{y+a}{x+a}$ , więc  $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > \frac{x+a}{y+a} + \frac{y+a}{x+a} > 2$ , gdyż suma liczby dodatniej i jej odwrotności jest co najmniej równa 2. Ta równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy tą liczbą jest 1, co w naszym przypadku nie zachodzi, bo równość  $\frac{y+a}{x+a} = 1$  oznaczałaby, że  $x = y$ , co jest sprzeczne z założeniem  $x < y$ .

### IV sposób

Niech  $f(a) = \frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} - 2$  dla  $a \geq 0$ .

Obliczamy  $f'(a) = \frac{1 \cdot (y+a) - 1 \cdot (x+a)}{(y+a)^2} = \frac{y-x}{(y+a)^2}$ , zatem  $f'(a) > 0$  dla każdego  $a \geq 0$ , więc

$f$  jest funkcją rosnącą. Wobec tego jeśli  $a > 0$ , to  $f(a) > f(0) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 \geq 0$ , bo suma liczby dodatniej i jej odwrotności jest równa co najmniej 2.

### Uwagi

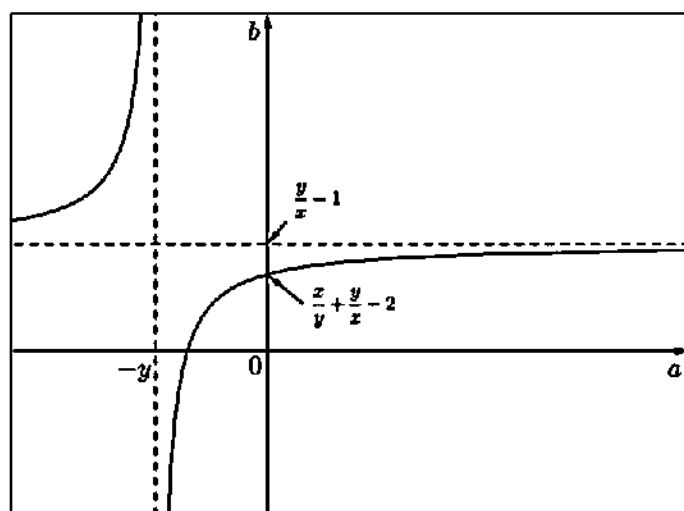
1. Prawdziwość nierówności  $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$  można też uzasadnić, odwołując się do nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich  $\frac{x+a}{y+a}$  i  $\frac{y}{x}$ .

2. Uzasadnienie, że funkcja  $f$  jest rosnąca w przedziale  $\langle 0, +\infty \rangle$  możemy przeprowadzić bez odwoływania się do rachunku pochodnych. Rozwiązanie może wyglądać następująco.

Niech  $x$  i  $y$  będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że  $x < y$ . Rozważmy funkcję  $f$  określoną wzorem  $f(a) = \frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} - 2$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a \neq -y$ . Jest to funkcja homograficzna. Zapiszmy jej wzór w postaci kanonicznej

$$f(a) = \frac{y+a+x-y}{y+a} + \frac{y}{x} - 2 = 1 + \frac{x-y}{y+a} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x-y}{y+a} + \frac{y}{x} - 1.$$

Wykresem tej funkcji jest hiperbola, której asymptotą poziomą jest, w układzie współrzędnych  $aOb$ , prosta o równaniu  $b = \frac{y}{x} - 1$ , natomiast asymptotą pionową jest prosta o równaniu  $a = -y$ . Ponieważ  $y > x > 0$ , więc  $\frac{y}{x} > 1$ , co oznacza, że asymptota pozioma leży w I i II ćwiartce układu współrzędnych, zaś asymptota pionowa leży w II i III ćwiartce tego układu. Ponadto  $x - y < 0$ , więc hiperbola, która jest wykresem funkcji  $f$  jest obrazem hiperboli o równaniu  $b = \frac{A}{a}$ , gdzie  $A < 0$ , łączącej w II i IV ćwiartce układu współrzędnych, jak na poniższym rysunku.



Wynika stąd, że w przedziale  $(-y, +\infty)$  funkcja  $f$  jest rosnąca. W szczególności jest ona rosnąca w przedziale  $(0, +\infty)$ . Zatem dla każdego argumentu  $a > 0$  prawdziwa jest nierówność  $f(a) > f(0)$ . Zauważmy, że  $f(0) = \frac{x+0}{y+0} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 > 2 - 2 = 0$ , gdyż liczby  $\frac{x}{y}$  i  $\frac{y}{x}$  są dodatnie, różne od 1 i jedna z nich jest odwrotnością drugiej.

W efekcie dla każdego argumentu  $a > 0$  prawdziwa jest nierówność

$$f(a) = \frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} - 2 > 0,$$

czyli

$$\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2.$$

### V sposób

Nierówność  $\frac{x+a}{y+a} + \frac{y}{x} > 2$  możemy przekształcić w sposób równoważny mnożąc obustronnie przez  $x(y+a)$ , bo z założenia  $x(y+a)$  jest większe od zera. Otrzymujemy

$$x(x+a) + y(y+a) > 2x(y+a)$$

Przekształcamy otrzymaną nierówność

$$x^2 + xa + y^2 + ya > 2xy + 2xa,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > xa - ya,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 > a(x - y),$$

$$(x - y)^2 > a(x - y).$$

Z założenia  $x < y$  i  $a > 0$ , zatem  $a(x - y) < 0$ , natomiast kwadrat  $(x - y)^2$  jest dodatni.

W rezultacie otrzymana nierówność jest prawdziwa. To kończy dowód.



**Zadanie 3. (0–3)**

V. Rozumowanie i argumentacja.	7. Planimetria. Zdający wykorzystuje własności figur podobnych w zadaniach, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym. (7.b).
--------------------------------	--

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie pełne** ..... 3 p.  
Zdający zapisze pełne, poprawne rozumowanie.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 p.  
Zdający

- zapisze, że trójkąty  $ASM$  i  $NLC$  lub trójkąty  $MKC$  i  $BTN$  są przystające, nie uzasadni tego przystawania i uzasadni tezę

albo

- zapisze dwie proporcje wynikające z podobieństwa trójkątów pozwalające (wraz z równością  $|AP| = |BP|$ ) wyznaczyć zależność między długościami odcinków  $ST$  i  $AB$ ,

$$\text{np.: } \frac{p}{x} = \frac{a}{b} \text{ i } \frac{|BT|}{b-x} = \frac{a}{b}$$

albo

- zapisze dwie proporcje wynikające z twierdzenia Talesa pozwalające (wraz z równością  $|AP| = |BP|$ ) wyznaczyć zależność między długościami odcinków  $ST$  i  $AB$ , np.:

$$\frac{p}{x} = \frac{a-p}{b-x} \text{ i } \frac{a-q}{b-x} = \frac{q}{x},$$

albo

- zapisze długości odcinków  $AB$ ,  $AS$  i  $BT$  w zależności od długości odcinków  $x = |AM|$ ,  $y = |MC|$  oraz kąta  $\alpha$  w postaci:  $|AB| = 2(x+y) \cdot \cos \alpha$ ,  $|AS| = x \cdot \cos \alpha$ ,  
 $|BT| = y \cdot \cos \alpha$ ,

albo

- narysuje odcinek  $MZ$  równoległy do  $BC$  oraz odcinek  $ZN$  lub odcinek  $NZ$  równoległy do  $AC$  oraz odcinek  $MZ$ , zapisze, że trójkąty  $AMZ$  i  $ZBN$  są równoramienne, ale nie uzasadni, że czworokąt  $MZNC$  jest równoległobokiem i poprawnie uzasadni tezę

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym postępowanie jest wprowadzić niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zdający

- zapisze, że trójkąty  $ASM$  i  $NLC$  są przystające lub trójkąty  $MKC$  i  $BTN$  są przystające

albo

- zapisze, że trójkąty, np.  $ASM$  i  $APC$  są podobne lub zapisze proporcję wynikającą z tego podobieństwa,

albo

- zapisze proporcję wynikającą z twierdzenia Talesa, np.:  $\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|SP|}{|MC|}$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$  oraz wysokość  $CF$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  $h = 8\sqrt{3}$ ,

albo

- wyznaczy długość odcinka  $AB$  w zależności od długości odcinków  $x = |AM|$ ,  $y = |MC|$  oraz kąta  $\alpha$ :  $|AB|^2 = (x+y)^2 + (x+y)^2 - 2 \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha)$ ,

albo

- zapisze dwie zależności:  $\frac{|AS|}{|AM|} = \cos \alpha$ ,  $\frac{|BT|}{|BN|} = \cos \alpha$ ,

albo

- narysuje odcinek  $MZ$  równoległy do  $BC$  oraz odcinek  $ZN$  lub odcinek  $NZ$  równoległy do  $AC$  oraz odcinek  $MZ$

i na tym zakończy lub dalej popelni błędy.

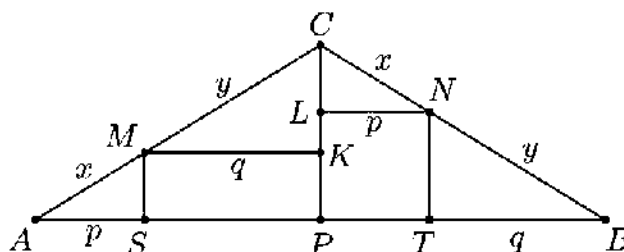
### Uwagi

1. Za uzasadnienie przystawiania trójkątów prostokątnych np.:  $ASM$  i  $NLC$  uznajemy
  - a) powołanie się na cechę przystawiania  $kbk$ , o ile na rysunku nie występują sprzeczne oznaczenia kątów,
  - b) zaznaczenie na rysunku jednej pary odpowiednich kątów ostrych w tych trójkątach.
2. W III i IV sposobie rozwiązania nie wymagamy uzasadnienia podobieństwa trójkątów lub powołania się na twierdzenie Talesa.
3. Jeżeli zdający rozpatrzy tylko szczególny przypadek, w którym punkty  $M$  i  $N$ , są środkami boków  $AC$  i  $BC$ , to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.
4. Jeżeli zdający zakłada, że trójkąt  $ABC$  jest równoboczny i korzysta z tego założenia, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
5. Jeżeli zdający przedstawia rozwiązanie, w którym odwołuje się tylko do argumentów pozamatematycznych, np. „przesuwa” punkty  $M$  i  $N$  po odcinkach  $AC$  i  $BC$  z tymi samymi szybkościami, to może otrzymać **1 punkt** za zauważenie, że rzuty prostokątne na prostą  $AB$  odcinków równych, z których jeden leży na prostej  $AC$ , a drugi na prostej  $BC$  są równe.

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób („przystawianie trójkątów $\Gamma$ ”)

Niech  $P$  będzie środkiem podstawy  $AB$  tego trójkąta. Poprowadźmy przez punkty  $M$  i  $N$  proste równoległe do podstawy  $AB$  trójkąta, a ich punkty przecięcia z prostą  $CP$  oznaczmy odpowiednio  $K$  i  $L$ . Oznaczmy też  $x = |AM| = |CN|$ ,  $y = |MC|$ ,  $p = |AS|$ ,  $q = |MK|$ , jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc  $|NB| = |MC| = y$ . Trójkąty  $ASM$  i  $NLC$  są przystające, gdyż oba są prostokątne,  $|AM| = |CN|$  oraz  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LNC|$  oraz

$|\sphericalangle AMS| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = 90^\circ - |\sphericalangle LNC| = |\sphericalangle NCL|$ . Podobnie uzasadniamy, że trójkąty  $MKC$  i  $BTN$  są przystające.

Zatem

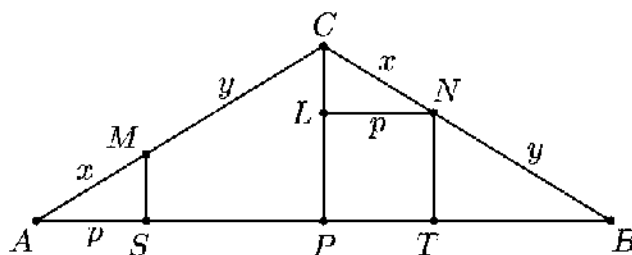
$$|PT| = |LN| = |AS| = p \text{ oraz } |SP| = |MK| = |TB| = q.$$

Stąd wynika, że

$$|ST| = |SP| + |PT| = q + p = \frac{1}{2} \cdot (2p + 2q) = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

II sposób („przystawanie trójkątów – II”)

Niech  $P$  będzie środkiem podstawy  $AB$  tego trójkąta. Poprowadźmy przez punkt  $N$  prostą równoległą do podstawy  $AB$  trójkąta, a punkt jej przecięcia z prostą  $CP$  oznaczmy przez  $L$ . Oznaczmy też  $x = |AM| = |CN|$ ,  $p = |AS|$ , jak na rysunku.



Trójkąty  $ASM$  i  $NLC$  są przystające, gdyż oba są prostokątne,  $|AM| = |CN|$ ,

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LNC| \text{ oraz } |\sphericalangle AMS| = 90^\circ - |\sphericalangle BAC| = 90^\circ - |\sphericalangle LNC| = |\sphericalangle NCL|.$$

Stąd wynika, że  $|PT| = |LN| = |AS| = p$ .

Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, więc  $|AP| = |BP|$ .

Stąd wynika, że

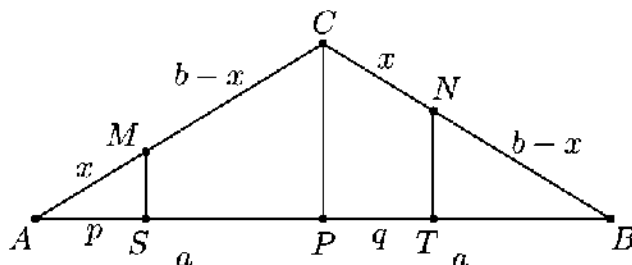
$$|ST| = |SP| + |PT| = (|AP| - p) + p = |AP| = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

Uwaga

Analogiczne rozumowanie możemy przeprowadzić, wychodząc od pary trójkątów przystających  $MKC$  i  $BTN$  (oznaczenia jak w I sposobie oceniania).

III sposób („podobieństwo trójkątów”)

Niech  $P$  będzie środkiem podstawy  $AB$  tego trójkąta. Oznaczmy też  $x = |AM| = |CN|$ ,  $b = |AC| = |BC|$ ,  $a = |AP|$ , jak na rysunku.



Ponieważ  $P$  jest spodkiem wysokości trójkąta równoramiennego, więc  $|BP| = |AP| = a$ .

Trójkąty  $ASM$  i  $APC$  są podobne na mocy cechy  $kkk$ , ponieważ obydwa są trójkątami prostokątnymi (odcinki  $SM$  i  $PC$  są równoległe), a kąt  $PAC$  jest kątem wspólnym obu trójkątów. Stąd wynika, że

$$\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|AP|}{|AC|}, \text{ czyli } \frac{p}{x} = \frac{a}{b}.$$

Stąd  $p = \frac{ax}{b}$ . Zatem  $|SP| = |AP| - p = a - \frac{ax}{b}$ .

Ponieważ  $NT \parallel CP$  i kąt  $CBP$  jest kątem wspólnym, więc na mocy cechy *kkk* trójkąt  $BTN$  jest podobny do trójkąta  $BPC$ . Stąd wynika, że

$$\frac{|BT|}{|BN|} = \frac{|BP|}{|BC|}, \text{ czyli } \frac{|BT|}{b-x} = \frac{a}{b}.$$

Stąd  $|BT| = \frac{a(b-x)}{b}$ , więc  $|PT| = |BP| - |BT| = a - \frac{a(b-x)}{b} = \frac{ab - ab + ax}{b} = \frac{ax}{b}$ .

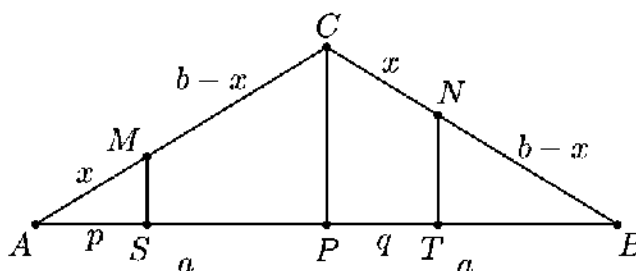
Zatem

$$|ST| = |SP| + |PT| = a - \frac{ax}{b} + \frac{ax}{b} = a = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

To kończy dowód.

#### IV sposób („twierdzenia Talesa”)

Niech  $P$  będzie środkiem podstawy  $AB$  tego trójkąta. Oznaczmy też  $x = |AM| = |CN|$ ,  $b = |AC| = |BC|$ ,  $a = |AP|$ ,  $p = |AS|$ ,  $q = |PT|$ , jak na rysunku.



Ponieważ trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, a  $P$  jest spodem jego wysokości, więc  $|BN| = |MC| = b - x$  i  $|BP| = |AP| = a$ .

Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|AS|}{|AM|} = \frac{|SP|}{|MC|} \text{ oraz } \frac{|BT|}{|BN|} = \frac{|PT|}{|NC|},$$

czyli

$$\frac{p}{x} = \frac{a-p}{b-x} \text{ oraz } \frac{a-q}{b-x} = \frac{q}{x}.$$

Stąd

$$pb - px = ax - px \text{ oraz } ax - qx = bq - qx,$$

$$p = \frac{ax}{b} \text{ oraz } q = \frac{ax}{b}.$$

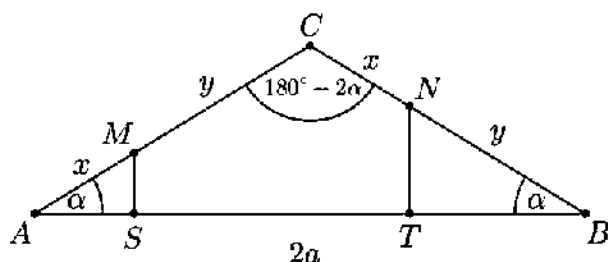
Zatem

$$|ST| = |SP| + |PT| = a - p + q = a - \frac{ax}{b} + \frac{ax}{b} = a = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

To kończy dowód.

V sposób („trygonometria”)

Oznaczmy  $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle ABC|$ ,  $x = |AM| = |CN|$ ,  $y = |MC|$ ,  $2a = |AP|$ , jak na rysunku.



Wtedy  $|NB| = |BC| - x = |AC| - x = y$  oraz  $|\sphericalangle ACB| = 180^\circ - 2\alpha$ .

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha), \\ |AB|^2 &= (x+y)^2 + (x+y)^2 - 2 \cdot (x+y) \cdot (x+y) \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha), \\ |AB|^2 &= 2(x+y)^2 + 2 \cdot (x+y)^2 \cdot \cos 2\alpha, \\ |AB|^2 &= 2(x+y)^2 (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ |AB|^2 &= 4(x+y)^2 \cdot \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Stąd

$$|AB| = 2(x+y) \cdot \cos \alpha.$$

Z trójkątów  $ASM$  i  $BTN$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{|AS|}{|AM|} &= \cos \alpha \text{ oraz } \frac{|BT|}{|BN|} = \cos \alpha, \\ \frac{|AS|}{x} &= \cos \alpha \text{ oraz } \frac{|BT|}{y} = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Stąd

$$|AS| = x \cdot \cos \alpha \text{ oraz } |BT| = y \cdot \cos \alpha.$$

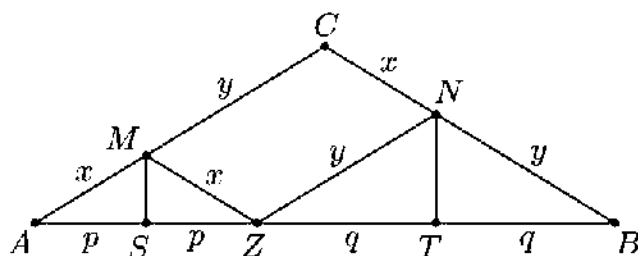
Zatem

$$|ST| = |AB| - |AS| - |BT| = 2(x+y) \cdot \cos \alpha - x \cdot \cos \alpha - y \cdot \cos \alpha = (x+y) \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

To kończy dowód.

VI sposób („trójkąty równoramienne”)

Narysujmy odcinek  $MZ$  równoległy do prostej  $BC$  taki, że koniec  $Z$  tego odcinka leży na podstawie  $AB$  trójkąta  $ABC$  oraz odcinek  $NZ$ . Oznaczmy też  $x = |AM| = |CN|$ ,  $y = |MC|$ ,  $p = |AS|$ ,  $q = |TB|$ , jak na rysunku.



Wtedy kąty odpowiadające  $AZM$  i  $ABC$  są równe. To oznacza, że trójkąt  $AZM$  jest równoramienny. Stąd wynika, że  $|MZ| = |AM| = |CN| = x$ . Zatem czworokąt  $MZNC$  jest równoległobokiem (jego boki  $MZ$  i  $CN$  są równoległe i mają równe długości), co oznacza, że  $|ZN| = |MC| = y$ . To z kolei oznacza, że trójkąt  $ZBN$  jest równoramienny. Punkty  $S$  i  $T$  to spodki wysokości trójkątów równoramiennych, więc

$$|AS| = |SZ| = p \text{ oraz } |ZT| = |TB| = q.$$

Stąd

$$|ST| = |SP| + |PT| = q + p = \frac{1}{2} \cdot (2p + 2q) = \frac{1}{2} \cdot |AB|.$$

To kończy dowód.

**Zadanie 4. (0–5)**

III. Modelowanie matematyczne.	5. Ciągi liczbowe. Zdający stosuje wzory na $n$ -ty wyraz i sumę $n$ początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym (5.c).
--------------------------------	--

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.Zdający wyznaczy szukaną trójkę liczb:  $a = 25$ ,  $b = 10$ ,  $c = 4$ .**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 4 p.

Zdający

- obliczy poprawnie dwie trójki liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i nie uwzględni warunku, że ciąg  $(a+1, b+5, c)$  musi być arytmetyczny i malejący

albo

- obliczy poprawnie dwie trójki liczb  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i uwzględni warunek, że ciąg  $(a+1, b+5, c)$  jest arytmetyczny i malejący, i poda konsekwentną odpowiedź, ale w trakcie rozwiązania popełnia błędy rachunkowe.

UwagaJeśli zdający rozwiąże równanie kwadratowe z jedną niewiadomą i na tym poprzestanie, lub w dalszej części rozwiązania popełnia błędy rzeczowe, to otrzymuje **3 punkty**.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.:  $100 = a(29 - a)$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.

Zdający wykorzysta własność ciągu geometrycznego i własność ciągu arytmetycznego

i zapisze np.:  $b^2 = ac$  i  $b+5 = \frac{a+1+c}{2}$ ,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zdający

- wykorzysta własność ciągu geometrycznego i zapisze np.:  $b^2 = ac$

albo

- wykorzysta własność ciągu arytmetycznego i zapisze np.:  $b+5 = \frac{a+1+c}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Przykładowe rozwiązanie**

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$b^2 = ac.$$

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy

$$b+5 = \frac{a+1+c}{2},$$

$$2b+9 = a+c.$$

Stąd i z równania  $a+b+c=39$  otrzymujemy

$$b+2b+9=39,$$

$$3b=30,$$

$$b=10.$$

Zatem  $a+c=29$  oraz  $100=ac$ . Z pierwszego z tych równań dostajemy  $c=29-a$ . Stąd i z drugiego równania otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą  $a$

$$100=a(29-a),$$

$$a^2-29a+100=0,$$

$$(a-4)(a-25)=0,$$

$$a=4 \text{ lub } a=25.$$

Gdy  $a=4$ , to  $c=29-a=25$ . Wówczas ciąg  $(a+1, b+5, c)$  ma postać  $(5, 15, 25)$ . Nie jest to jednak ciąg malejący.

Gdy  $a=25$ , to  $c=29-a=4$ . Wówczas ciąg  $(a+1, b+5, c)$  ma postać  $(26, 15, 4)$ . Jest to malejący ciąg arytmetyczny.

Zatem:  $a=25$ ,  $b=10$ ,  $c=4$ .



**Zadanie 5. (0–6)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający rozwiązuje zadania dotyczące wzajemnego położenia prostej i okręgu, oraz dwóch okręgów na płaszczyźnie kartezjańskiej (R8.b).
-----------------------------------	--

**Schemat punktowania****I. Rozwiązanie z wykorzystaniem odległości środków okręgów stycznych**

Rozwiązanie składa się z trzech etapów:

**Pierwszy etap** polega na wyznaczeniu środków i promieni obu podanych okręgów oraz ustaleniu warunków ogólnych ich położenia względem siebie.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu równania z jedną niewiadomą, która opisuje warunek styczności zewnętrznej i rozwiązanie tego równania.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu równania z jedną niewiadomą, która opisuje warunek styczności wewnętrznej i rozwiązanie tego równania.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Uwaga

Etapy drugi i trzeci oceniane są niezależnie od siebie.

Podział punktów za **pierwszy etap** rozwiązania:

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy:

zapisze współrzędne środków i promienie obu okręgów:

$$S_1 = (6, 4), r_1 = 3 \text{ oraz } S_2 = (a, -2), r_2 = 9$$

oraz

zapisze warunki styczności obu okręgów w dwóch przypadkach:

$$|S_1 S_2| = r_1 + r_2, \quad |S_1 S_2| = r_2 - r_1.$$

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy:

- zauważy i zapisze, że są dwa przypadki styczności okręgów, tj. styczność zewnętrzną i wewnętrzną

albo

- wyznaczy współrzędne środków okręgów i obliczy promienie obu okręgów.

Podział punktów za **drugi etap** rozwiązania:

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy zapisze równanie:

$$\sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 12$$

i wyznaczy jego rozwiązania:  $a = 6(1 + \sqrt{3})$  oraz  $a = 6(1 - \sqrt{3})$ .

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy zapisze równanie:

$$\sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 12.$$

Podział punktów za **trzeci etap** rozwiązania:

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy zapisze równanie:

$$\sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 6$$

i wyznaczy jego rozwiązanie:  $a = 6$ .

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy zapisze równanie:

$$\sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 6.$$

### Uwagi

1. Jeżeli zdający prowadzi poprawne rozumowanie na każdym etapie rozwiązania zadania i rozwiązuje zadanie do końca, ale popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający prowadzi poprawne rozumowanie na każdym etapie rozwiązania zadania, rozwiązuje zadanie do końca i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozwiązania zadania na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na:
  - a) niepoprawnym wyznaczeniu promieni okręgów lub współrzędnych ich środków, to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty**;
  - b) zastosowaniu niepoprawnej metody wyznaczenia odległości środków okręgów, to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty**;
  - c) zastosowaniu niepoprawnego wzoru „ $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$ ” lub „ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$ ”, to zdający otrzymuje co najwyżej **4 punkty**.
3. Jeżeli zdający sporządzi poprawną ilustrację graficzną i na tej podstawie zapisze, że dla  $a = 6$  podane okręgi są styczne wewnętrznie i na tym zakończy, to otrzymuje **2 punkty**.
4. Jeżeli zdający rozważy tylko jeden przypadek styczności okręgów i w tym przypadku rozwiąże zadanie do końca, popełniając jeden błąd opisany w uwadze 2., to otrzymuje co najwyżej **2 punkty**.

## II. Rozwiązanie z wykorzystaniem wspólnej stycznej lub równania kwadratowego z parametrem

Zdający otrzymuje **6 punktów**, gdy wyznaczy wszystkie wartości parametru  $a$ :

$$a = 6 \text{ lub } a = 6 + 6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6 - 6\sqrt{3}.$$

Zdający otrzymuje **5 punktów**, gdy wyznaczy tylko jedno z rozwiązań równania z jedną niewiadomą  $a$  zapisze równanie kwadratowe z niewiadomą  $a$ , np.:  $a = 6$ .

Zdający otrzymuje **4 punkty**, gdy zapisze równanie wielomianowe z niewiadomą  $a$ :

$$(a^2 - 12a)^2 = 9(4a^2 - 48a + 288) \text{ lub}$$

$$4^2(a^3 - 6a^2 - 72a + 864)^2 - 4 \cdot 4(a^2 - 12a + 72) \cdot (a^4 - 144a^2 + 9072) = 0.$$

Zdający otrzymuje **3 punkty**, gdy

- zapisze równanie z niewiadomą  $a$ :  $\frac{|(12-2a) \cdot 6 + 12 \cdot 4 + a^2 - 120|}{\sqrt{(12-2a)^2 + 12^2}} = 3$

albo

- zapisze równanie kwadratowe z jedną niewiadomą  $x$  (lub  $y$ ) i parametrem  $a$  oraz zapisze, że równanie to musi mieć jedno rozwiązanie, np.:

$$x^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2 \right)^2 - 12x - 8 \left( \left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2 \right) + 43 = 0 \text{ oraz } \Delta = 0.$$

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy

- zapisze równanie prostej  $(12-2a)x + 12y + a^2 - 120 = 0$  oraz zapisze współrzędne środka i promień jednego z okręgów oraz zapisze, że okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, gdy odległość środka jednego okręgu od wspólnej stycznej tych okręgów jest równa promieniowi tego okręgu

albo

- zapisze równanie z jedną niewiadomą  $x$  (lub  $y$ ) i parametrem  $a$ , np.:

$$x^2 + \left( \left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2 \right)^2 - 12x - 8 \left( \left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2 \right) + 43 = 0.$$

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy

- zapisze równanie prostej  $(12-2a)x + 12y + a^2 - 120 = 0$

albo

- zapisze współrzędne środka i promień jednego z okręgów oraz zapisze, że okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, gdy odległość środka jednego okręgu od wspólnej stycznej tych okręgów jest równa promieniowi tego okręgu.

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze równanie prostej, będącej osią potęgową okręgów i traktuje to równanie jak równanie kwadratowe zmiennej  $a$ , a następnie wyznacza konkretne wartości  $x$ ,  $y$ ,  $a$ , sprawdza dla wyznaczonych wartości prawdziwość równania osi potęgowej okręgów i podaje jedno z rozwiązań zadania, to otrzymuje **3 punkty**.

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$  ma środek punkcie  $S_1 = (6, 4)$  i promień  $r_1 = 3$ , a okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$  ma środek w punkcie  $S_2 = (a, -2)$  i promień  $r_2 = 9$ . Ponieważ te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny, więc odległość pomiędzy środkami okręgów jest równa sumie promieni lub różnicy promieni:

$$|S_1S_2| = r_1 + r_2 \text{ lub } |S_1S_2| = r_2 - r_1$$

Otrzymujemy zatem równania

$$\sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 12 \text{ lub } \sqrt{(a-6)^2 + 6^2} = 6$$

Zatem

$$(a-6)^2 = 108 \text{ lub } (a-6)^2 = 0$$

Równanie  $(a-6)^2 = 108$  ma dwa rozwiązania:  $a = 6(1+\sqrt{3})$  oraz  $a = 6(1-\sqrt{3})$ , natomiast równanie  $(a-6)^2 = 0$  ma jedno rozwiązanie  $a=6$ . Zatem podane okręgi są styczne zewnętrznie dla  $a = 6(1+\sqrt{3})$  lub dla  $a = 6(1-\sqrt{3})$ , natomiast są okręgami stycznymi wewnętrznymi dla  $a = 6$ .

II sposób (wspólna styczna)

Okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$  ma środek  $S_1 = (6, 4)$  i promień  $r_1 = 3$ , a okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$  ma środek  $S_2 = (a, -2)$  i promień  $r_2 = 9$ .

Okręgi te mają różne promienie, więc te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy mają dokładnie jedną wspólną styczną. Tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka jednego z tych okręgów od tej stycznej jest równa promieniowi tego okręgu. Jeśli tę wspólną styczną oznaczymy przez  $k$ , to wtedy mamy

$$\text{odl}(S_1, k) = 3.$$

Odejmując stronami równania okręgów otrzymujemy

$$(12-2a)x + 12y + a^2 - 120 = 0.$$

Jest to równanie wspólnej osi potęgowej tych okręgów. Jeśli teraz istnieją takie wartości parametru  $a$ , dla których spełniony jest warunek  $\text{odl}(S_1, k) = 3$ , to wtedy ta oś potęgowa jest jednocześnie wspólną styczną tych okręgów. Otrzymujemy zatem równanie

$$\frac{|(12-2a) \cdot 6 + 12 \cdot 4 + a^2 - 120|}{\sqrt{(12-2a)^2 + 12^2}} = 3,$$

$$|a^2 - 12a| = 3\sqrt{4a^2 - 48a + 288}.$$

Obie strony tego równania są nieujemne, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne

$$(a^2 - 12a)^2 = 9(4a^2 - 48a + 288),$$

$$a^4 - 24a^3 + 144a^2 = 36a^2 - 432a + 2592,$$

$$a^4 - 24a^3 + 108a^2 + 432a - 2592 = 0,$$

$$a^4 - 12a^3 + 36a^2 - 12a^3 + 144a^2 - 432a - 72a^2 + 864a - 2592 = 0,$$

$$a^2(a^2 - 12a + 36) - 12a(a^2 - 12a + 36) - 72(a^2 - 12a + 36) = 0,$$

$$(a^2 - 12a - 72)(a^2 - 12a + 36) = 0,$$

$$(a^2 - 12a + 36 - 108)(a-6)^2 = 0,$$

$$((a-6)^2 - 36 \cdot 3)(a-6)^2 = 0,$$

$$(a-6-6\sqrt{3})(a-6+6\sqrt{3})(a-6)^2 = 0.$$

Stąd

$$a = 6 + 6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6 - 6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6.$$

III sposób (równanie kwadratowe z parametrem)

Okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$  ma środek  $S_1 = (6, 4)$  i promień  $r_1 = 3$ , a okrąg o równaniu  $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$  ma środek  $S_2 = (a, -2)$  i promień  $r_2 = 9$ .

Okręgi te mają różne promienie, więc te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy układ równań

$$x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie. Stąd otrzymujemy kolejno

$$(12 - 2a)x + 12y + a^2 - 120 = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$$

$$y = \left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2 \text{ i } x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0.$$

Stąd otrzymujemy równanie z niewiadomą  $x$  i parametrem  $a$

$$x^2 + \left(\left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2\right)^2 - 12x - 8\left(\left(1 - \frac{1}{6}a\right)x + 10 - \frac{1}{12}a^2\right) + 43 = 0,$$

$$4(a^2 - 12a + 72)x^2 - 4(a^3 - 6a^2 - 72a + 864)x + a^4 - 144a^2 + 9072 = 0.$$

Ponieważ  $a^2 - 12a + 72 = (a - 6)^2 + 36 > 0$  dla każdego  $a$ , więc równanie jest kwadratowe.

Zatem układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie, a tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy wyróżnik trójmianu kwadratowego  $4(a^2 - 12a + 72)x^2 - 4(a^3 - 6a^2 - 72a + 864)x + a^4 - 144a^2 + 9072$  jest równy 0. Otrzymujemy więc równanie

$$4^2(a^3 - 6a^2 - 72a + 864)^2 - 4 \cdot 4(a^2 - 12a + 72) \cdot (a^4 - 144a^2 + 9072) = 0,$$

$$(a^3 - 6a^2 - 72a + 864)^2 - (a^2 - 12a + 72) \cdot (a^4 - 144a^2 + 9072) = 0,$$

$$-36a^4 + 864a^3 - 3888a^2 - 15552a + 93312 = 0,$$

$$-36a^4 + 864a^3 - 3888a^2 - 15552a + 93312 = 0,$$

$$a^4 - 24a^3 + 108a^2 + 432a - 2592 = 0,$$

$$a^4 - 12a^3 + 36a^2 - 12a^3 + 144a^2 - 432a - 72a^2 + 864a - 2592 = 0,$$

$$a^2(a^2 - 12a + 36) - 12a(a^2 - 12a + 36) - 72(a^2 - 12a + 36) = 0,$$

$$(a^2 - 12a - 72)(a^2 - 12a + 36) = 0,$$

$$(a^2 - 12a + 36 - 108)(a - 6)^2 = 0,$$

$$((a - 6)^2 - 36 \cdot 3)(a - 6)^2 = 0,$$

$$(a - 6 - 6\sqrt{3})(a - 6 + 6\sqrt{3})(a - 6)^2 = 0.$$

Stąd

$$a = 6 + 6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6 - 6\sqrt{3} \text{ lub } a = 6.$$

**Zadanie 6. (0–5)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający wykonuje dzielenie wielomianu przez dwumian $x - a$ ; stosuje twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - a$ (R2.b). 3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności wielomianowe (R3.c).
-----------------------------------	--

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne** ..... 5 p.Zdający wyznaczy miejsca zerowe:  $2, -3, -\frac{1}{2}$ .**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania** ..... 4 p.Zdający wyznaczy szukaną wartość  $m$ :  $m = 1$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.Zdający rozwiąże jedno z otrzymanych równań stopnia trzeciego z jedną niewiadomą  $m$ : np.równanie  $4m^3 - 4m = 0$  ma trzy rozwiązania:  $m = 0, m = 1, m = -1$ ,równanie  $m^3 - 4m + 3 = 0$  ma trzy rozwiązania:  $m = 1, m = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, m = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.Zdający zapisze dwa równania z niewiadomą  $m$ : $2 \cdot 2^3 + (m^3 + 2) \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 2(2m + 1) = 0$  i  $2 \cdot (-1)^3 + (m^3 + 2) \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 2(2m + 1) = 6$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający

- zapisze warunek  $W(2) = 0$  lub równanie  $2 \cdot 2^3 + (m^3 + 2) \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 2(2m + 1) = 0$

albo

- zapisze warunek  $W(-1) = 6$  lub równanie

$$2 \cdot (-1)^3 + (m^3 + 2) \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 2(2m + 1) = 6$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Przykładowe rozwiązanie**Z twierdzenie Bezoute'a wynika, że  $W(2) = 0$ , czyli

$$2 \cdot 2^3 + (m^3 + 2) \cdot 2^2 - 11 \cdot 2 - 2(2m + 1) = 0,$$

$$16 + 4m^3 + 8 - 22 - 4m - 2 = 0,$$

$$4m^3 - 4m = 0,$$

$$4m(m^2 - 1) = 0,$$

$$4m(m - 1)(m + 1) = 0,$$

$$m = 0 \text{ lub } m = 1 \text{ lub } m = -1.$$

Z twierdzenia o reszcie z dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy otrzymujemy  $W(-1) = 6$ , czyli

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-1)^3 + (m^3 + 2) \cdot (-1)^2 - 11 \cdot (-1) - 2(2m + 1) &= 6, \\ -2 + m^3 + 2 + 11 - 4m - 2 &= 6, \\ m^3 - 4m + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Jednym z rozwiązań tego równania jest  $m = 1$ , gdyż  $1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$ . Zatem wielomian  $P(m) = m^3 - 4m + 3$  jest podzielny przez  $m - 1$ . Dzielnic to wykonamy przy pomocy algorytmu Hornera

	1	0	-4	3
1	1	1	-3	0

Zatem  $P(m) = (m - 1)(m^2 + m - 3)$ . Pozostałe pierwiastki wielomianu  $P$  to pierwiastki trójmianu kwadratowego  $m^2 + m - 3$ . Obliczmy te pierwiastki

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 13, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{13}$$

$$m_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, \quad m_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}.$$

Zatem jest tylko jedna szukana wartość  $m = 1$ .

Dla  $m = 1$  wielomian  $W(x)$  przyjmuje postać:

$$2x^3 + 3x^2 - 11x - 6.$$

Szukamy pierwiastków tego wielomianu stosując dzielenie przez dwumian  $x - 2$  i otrzymujemy:

$$W(x) = (x - 2)(2x^2 + 7x + 3).$$

Rozkładamy wielomian na czynniki stopnia pierwszego:  $2(x - 2)(x + 3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ .

Miejscami zerowymi są:  $2, -3, -\frac{1}{2}$ .

#### Uwaga

Nie musimy rozwiązywać obu otrzymanych równań. Po rozwiązaniu pierwszego z nich wystarczy sprawdzić, która z wyznaczonych wartości  $m$  jest rozwiązaniem drugiego równania.

Ponieważ  $0^3 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0$ , więc  $m = 0$  nie jest poszukiwaną wartością  $m$ .

Ponieważ  $1^3 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$ , więc dla  $m = 1$  spełnione są wszystkie warunki zadania.

Ponieważ  $(-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 3 = 8 \neq 0$ , więc  $m = -1$  nie jest poszukiwaną wartością  $m$ .

**Zadanie 7. (0–4)**

II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	6. Trygonometria. Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.e).
--	--

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie pełne** ..... 4 p.

Zdający wyznaczy wszystkie rozwiązania równania w podanym przedziale:

$$x = 0 \text{ lub } x = \pi, \text{ lub } x = 2\pi, \text{ lub } x = \frac{7\pi}{6}, \text{ lub } x = \frac{11\pi}{6}.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 3 p.

Zdający

- rozwiąże jedno z równań  $\sin x = 0$  lub  $\sin x = -\frac{1}{2}$  w przedziale  $\langle 0, 2\pi \rangle$

albo

- wyznaczy wszystkie rozwiązania równań  $\sin x = 0$  i  $\sin x = -\frac{1}{2}$  w zbiorze  $R$ .

**Rozwiązanie, w którym postęp jest istotny** ..... 2 p.

Zdający zapisze alternatywę dwóch równań trygonometrycznych

$$\sin x = 0 \text{ lub } \sin x = -\frac{1}{2}$$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zdający zapisze podane równanie w postaci, w której występuje tylko jedna funkcja

trygonometryczna tego samego argumentu, np.  $1 - 2 \sin^2 x = \sin x + 1$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Uwagi**

- Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie sprzeczne lub równanie, którego wszystkie rozwiązania są spoza przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**.
- Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma tylko jedno rozwiązanie z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
- Jeżeli zdający popełnił błąd przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i otrzymał równanie, które ma dwa rozwiązania z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ , przy czym co najmniej jedno z nich jest z przedziału  $(-1, 1)$ , to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
- Jeżeli zdający poda rozwiązanie bez stosownego uzasadnienia, to otrzymuje **0 punktów**.



**Zadanie 8. (0–4)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów (R7.d).
-----------------------------------	--

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne .....4 p.**Zdający obliczy obwód trójkąta  $ABC$ :  $L_{ABC} = 120$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .....3 p.**Zdający zapisze równanie wymierne z jedną niewiadomą  $a$ , np.:

$$a^2 = 256 + a^2 + 12a + 36 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{lub} \quad a^2 = \frac{49}{\left(\frac{1}{7}\right)^2}, \quad \text{lub} \quad \frac{1}{7} = \frac{7}{a}, \quad \text{lub}$$

$$a^2 = (8\sqrt{3})^2 + (a-2)^2, \quad \text{lub} \quad a^2 = (\sqrt{192})^2 + (a-2)^2, \quad \text{lub} \quad 16^2 \cdot a + a^2 \cdot 6 = (a+6)(14^2 + a \cdot 6), \quad \text{lub}$$

$$48a^2 = 49(a^2 - 49), \quad \text{lub} \quad 49\left(1 - \frac{49}{a^2}\right) = 48, \quad \text{lub} \quad \frac{a}{4\sqrt{3}} = \frac{14}{2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{1}{7}}, \quad \text{lub} \quad \frac{a}{14} = \frac{7}{2}, \quad \text{lub}$$

$$16^2 = (a+6)^2 + a^2 - 2 \cdot (a+6) \cdot a \cdot \frac{2a^2 - 14^2}{2a^2}, \quad \text{lub} \quad (a+11)(a-5) \cdot 5 \cdot 11 = (24\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cdot a)^2.$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .....2 p.**

Zdający

- obliczy  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$  oraz zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$ :  $a^2 = 16^2 + (a+6)^2 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \cos \alpha$

albo

- obliczy  $\cos \omega = \frac{1}{7}$  oraz zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BCD$ , np.:  $14^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - 2\omega)$  lub  $a^2 = a^2 + 14^2 - 2 \cdot 14a \cdot \cos \omega$ ,

albo

- obliczy  $\sin \omega = \frac{4\sqrt{3}}{7}$  oraz  $\sin(180^\circ - 2\omega) = 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{1}{7}$ ,

albo

- obliczy  $\cos \omega = \frac{1}{7}$  oraz zapisze równanie wynikające z definicji cosinusa w trójkącie  $BCD$ :  $\cos \omega = \frac{|ED|}{a}$ ,

albo

- obliczy  $|AF| = 8$ ,  $|CF| = 8\sqrt{3}$  oraz wyznaczy długość odcinka  $BF$  w zależności od  $a$ :  
 $|BF| = a - 2$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$ , wyznaczy pole trójkąta  $BCD$  w zależności od  $a$  oraz wyznaczy stosunek pól trójkątów  $ADC$  i  $BCD$  w zależności od  $a$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  
 $P_{BCD} = 7\sqrt{a^2 - 49}$ ,  $\frac{P_{ADC}}{P_{BCD}} = \frac{6}{a}$ ,

albo

- zapisze równanie pierwiastkowe z niewiadomą  $a$ :  $a = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{7}{a}\sqrt{1 - \frac{49}{a^2}}}$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$ , wysokość  $CF$  oraz długość odcinka  $DF$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  
 $|CF| = 8\sqrt{3}$ ,  $|DF| = 2$ ,

albo

- zapisze układ równań z dwiema niewiadomymi  $a$  i  $\cos \beta$ :  
 $16^2 = (a+6)^2 + a^2 - 2 \cdot (a+6) \cdot a \cdot \cos \beta$  i  $14^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \beta$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$  oraz wyznaczy pola trójkątów  $ABC$  i  $BCD$  w zależności od  $a$ :  
 $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  $P_{ABC} = \sqrt{(a+11)(a-5) \cdot 5 \cdot 11}$ ,  $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot a$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- obliczy  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$

albo

- zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$ :  
 $a^2 = 16^2 + (a+6)^2 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \cos \alpha$  lub  $16^2 = (a+6)^2 + a^2 - 2 \cdot (a+6) \cdot a \cdot \cos \beta$ ,

albo

- obliczy  $\cos \delta = -\frac{1}{7}$  lub  $\cos \omega = \frac{1}{7}$ ,

albo

- zapisze, że  $\cos \omega = \frac{|ED|}{a}$  lub  $\cos \omega = \frac{7}{a}$ ,

albo

- zapisze układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi:  
 $16^2 = h^2 + (x+6)^2$  oraz  $14^2 = h^2 + x^2$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$  i wyznaczy pole trójkąta  $BCD$  w zależności od  $a$  – długości boku  $BC$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  $P_{BCD} = 7\sqrt{a^2 - 49}$ ,

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$  i wyznaczy pola trójkątów  $ABC$  i  $BCD$  w zależności od  $a$  – długości boku  $BC$  oraz  $\sin \beta$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a + 6) \cdot a \cdot \sin \beta$ ,

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \beta,$$

albo

- obliczy pole trójkąta  $ADC$  oraz wysokość  $CF$ :  $P_{ADC} = 24\sqrt{3}$ ,  $|CF| = 8\sqrt{3}$ ,

albo

- zapisze równanie wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BCD$ :

$$14^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \beta$$

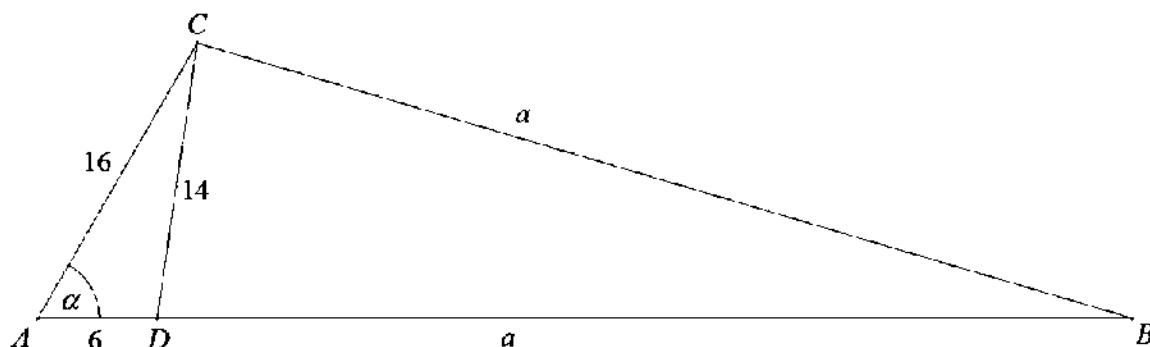
i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

### Uwagi

1. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozważanego zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania.
2. Jeżeli zdający pominie współczynnik  $\frac{1}{2}$  we wzorze na pole trójkąta, to może otrzymać **3 punkty** za rozwiązanie zadania konsekwentnie do końca.
3. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i jedynym błędem, który jednak nie ułatwia rozważania zagadnienia na żadnym etapie rozwiązania, jest błąd, polegający na niepoprawnym zastosowaniu:
  - a) twierdzenia cosinusów lub twierdzenia sinusów, lub niewłaściwym podstawieniu do wzoru z tego twierdzenia,
  - b) definicji funkcji trygonometrycznej,
  - c) wzoru Herona,
  - d) twierdzenia Pitagorasa,
  - e) wzoru redukcyjnego,
  - f) wzoru na pole trójkąta z sinusem kąta między bokami,
  - g) twierdzenia Stewarta,
  - h) wzoru „ $\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}$ ” lub „ $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ”,  
to zdający otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za rozwiązanie całego zadania.
4. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania, i popełnia jeden błąd, wymieniony w uwadze 3., a ponadto popełnia błędy rachunkowe, to otrzymuje **1 punkt**.
5. Jeżeli zdający stosuje przybliżenia funkcji trygonometrycznych i tym samym zmienia aspekt rozważanego zagadnienia, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.
6. Jeżeli zdający zakłada, że kąt  $CAD$  ma miarę 60 stopni, to może uzyskać jedynie punkty za te części rozwiązania, w których nie korzysta z tego nieuprawnionego założenia.

**Przykładowe rozwiązania**I sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$14^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos \alpha .$$

Stąd

$$\cos \alpha = \frac{16^2 + 6^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 6} = \frac{1}{2} .$$

Zatem  $\alpha = 60^\circ$ .Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} a^2 &= 16^2 + (a+6)^2 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \cos \alpha , \\ a^2 &= 256 + a^2 + 12a + 36 - 2 \cdot 16 \cdot (a+6) \cdot \frac{1}{2} , \end{aligned}$$

$$4a = 196 ,$$

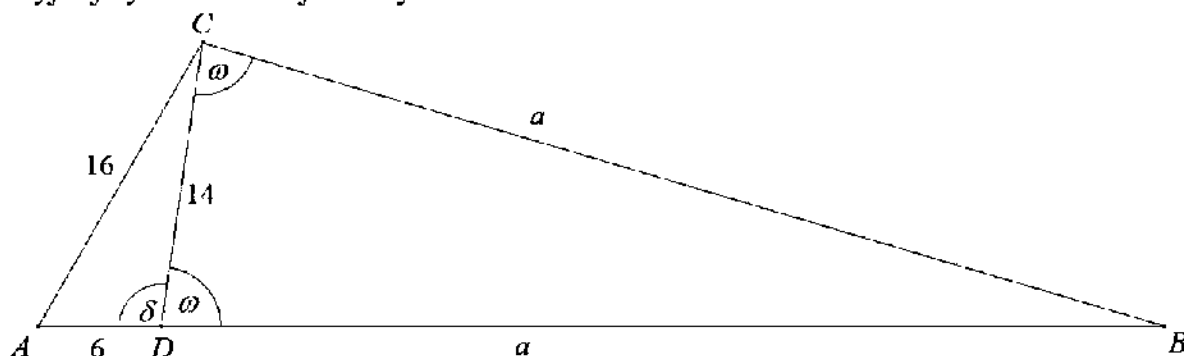
$$a = 49 .$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120 .$$

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$16^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos \delta .$$

Stąd

$$\cos \delta = \frac{14^2 + 6^2 - 16^2}{2 \cdot 14 \cdot 6} = -\frac{1}{7}.$$

Zatem

$$\cos \omega = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BCD$  otrzymujemy

$$14^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos(180^\circ - 2\omega),$$

$$196 = 2a^2(1 + \cos 2\omega),$$

$$a^2 = \frac{98}{1 + \cos 2\omega} = \frac{98}{1 + 2\cos^2 \omega - 1} = \frac{49}{\cos^2 \omega} = \frac{49}{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = 49^2, \quad a = 49$$

albo

$$a^2 = a^2 + 14^2 - 2 \cdot 14a \cdot \cos \omega,$$

$$28a \cdot \frac{1}{7} = 196, \quad a = 49,$$

albo z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{a}{\sin \omega} = \frac{14}{\sin(180^\circ - 2\omega)}$$

$$\sin(180^\circ - 2\omega) = \sin 2\omega = 2 \sin \omega \cdot \cos \omega$$

$$\sin(180^\circ - 2\omega) = 2 \cdot \frac{4\sqrt{27}}{21} \cdot \frac{3}{21} = \frac{24\sqrt{27}}{441}$$

$$\frac{a}{\frac{4\sqrt{27}}{21}} = \frac{14}{2 \cdot \frac{4\sqrt{27}}{21} \cdot \frac{3}{21}}$$

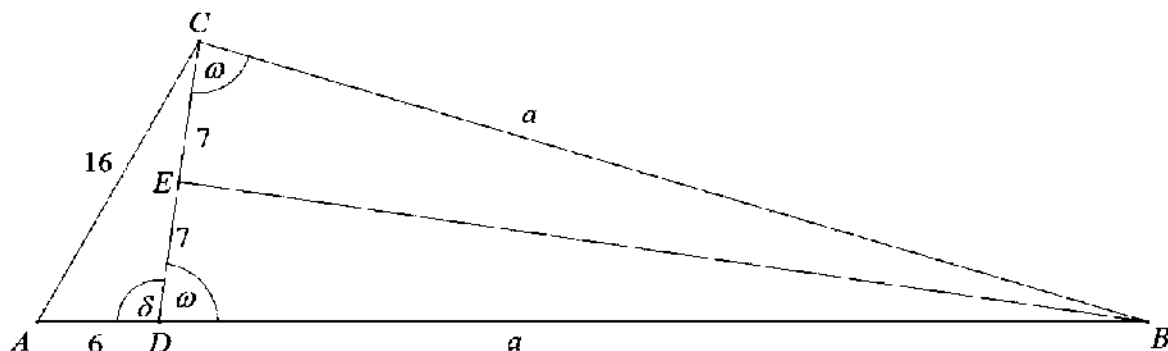
$$a = \frac{14}{\frac{6}{21}} = 49.$$

Więc obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### III sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$16^2 = 14^2 + 6^2 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos \delta.$$

Stąd

$$\cos \delta = \frac{14^2 + 6^2 - 16^2}{2 \cdot 14 \cdot 6} = -\frac{1}{7}.$$

Zatem

$$\cos \omega = \cos(180^\circ - \delta) = -\cos \delta = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}.$$

Trójkąt  $BCD$  jest równoramienny, więc spodek  $E$  wysokości  $BE$  tego trójkąta jest środkiem boku  $CD$ . Zatem

$$\cos \omega = \frac{|ED|}{a},$$

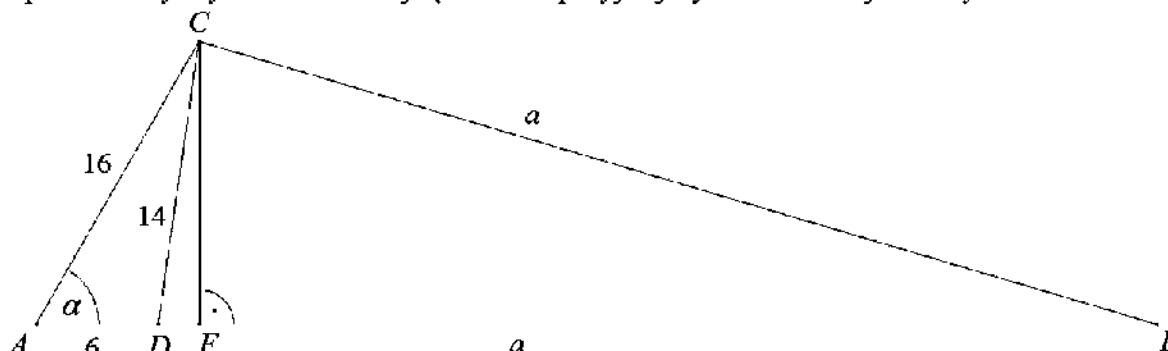
$$\frac{1}{7} = \frac{7}{a}$$

Stąd  $a = 49$ , więc obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### IV sposób

Poprowadźmy wysokość  $CF$  trójkąta  $ABC$  i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ADC$  otrzymujemy

$$14^2 = 16^2 + 6^2 - 2 \cdot 16 \cdot 6 \cdot \cos \alpha.$$

Stąd

$$\cos \alpha = \frac{16^2 + 6^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 6} = \frac{1}{2}.$$

Zatem  $\alpha = 60^\circ$ . Trójkąt  $AFC$  jest więc połową trójkąta równobocznego o boku długości 16. Stąd  $|AF| = 8$  i  $|CF| = 8\sqrt{3}$ .

W rezultacie  $|DF| = |AF| - |AD| = 8 - 6 = 2$  oraz  $|BF| = |BD| - |DF| = a - 2$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCF$  otrzymujemy

$$a^2 = (8\sqrt{3})^2 + (a-2)^2,$$

$$a^2 = 192 + a^2 - 4a + 4$$

$$4a = 196,$$

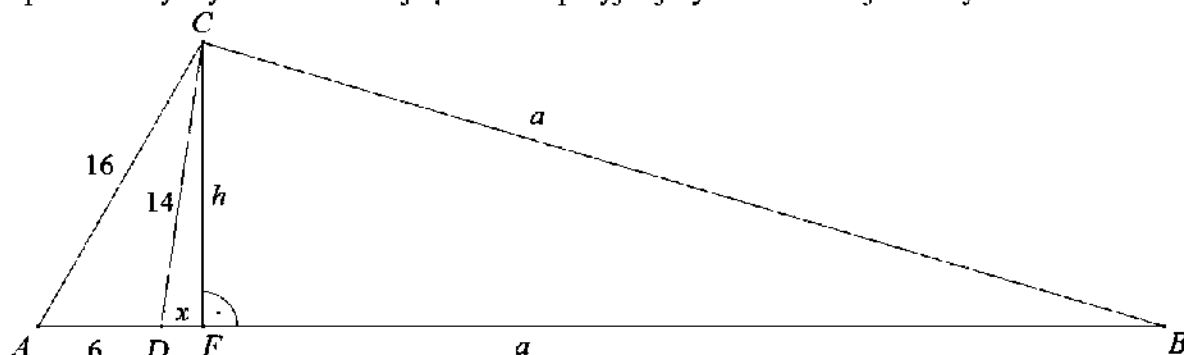
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

V sposób

Poprowadźmy wysokość  $CF$  trójkąta  $ABC$  i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $AFC$  i  $DFC$  otrzymujemy

$$16^2 = h^2 + (x+6)^2 \text{ oraz } 14^2 = h^2 + x^2,$$

$$256 = h^2 + x^2 + 12x + 36 \text{ oraz } 196 = h^2 + x^2,$$

$$220 = 196 + 12x \text{ oraz } h^2 = 196 - x^2,$$

$$24 = 12x \text{ oraz } h^2 = 196 - x^2,$$

$$x = 2 \text{ oraz } h = \sqrt{196 - 2^2} = \sqrt{192}.$$

Zatem  $|BF| = |BD| - |DF| = a - 2$ .

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCF$  otrzymujemy

$$a^2 = (\sqrt{192})^2 + (a-2)^2,$$

$$a^2 = 192 + a^2 - 4a + 4$$

$$4a = 196,$$

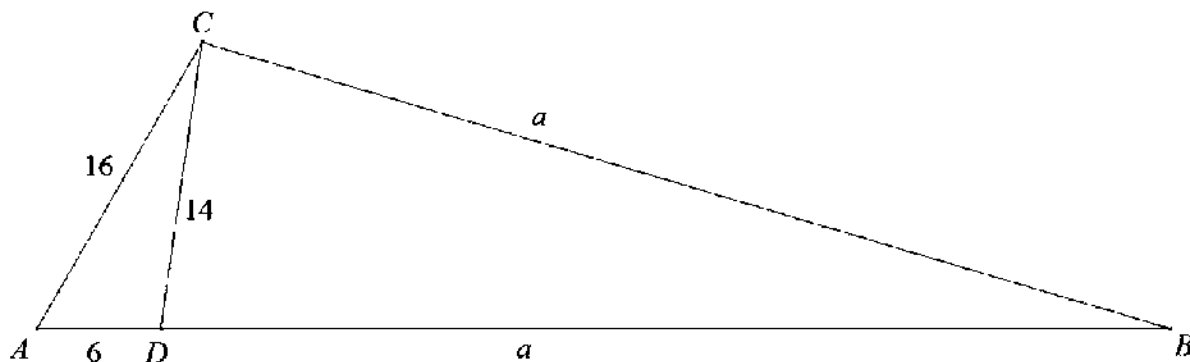
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### VI sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia Stewarta dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$16^2 \cdot a + a^2 \cdot 6 = (a+6)(14^2 + a \cdot 6),$$

$$6a^2 + 256a = (a+6)(6a+196),$$

$$3a^2 + 128a = 3a^2 + 116a + 588$$

$$12a = 588,$$

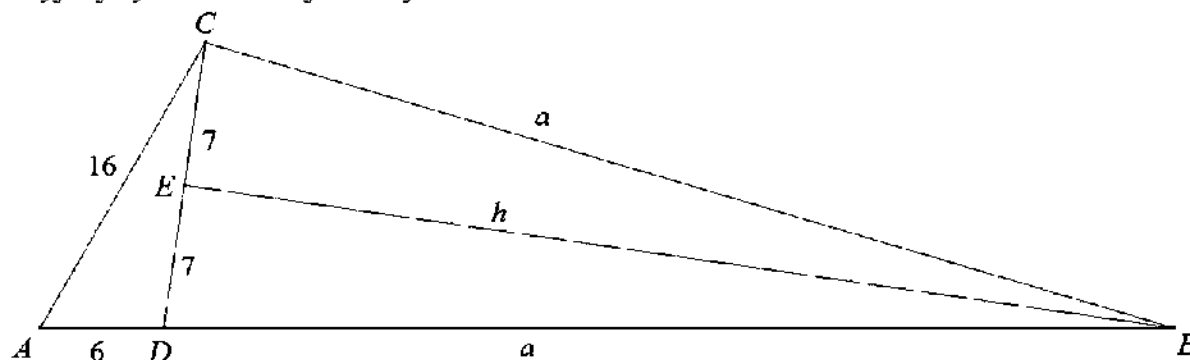
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta ABC jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### VII sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczmy pole trójkąta ADC ze wzoru Herona.

Półowa obwodu tego trójkąta jest równa  $p = \frac{16+14+6}{2} = 18$ , więc

$$P_{ADC} = \sqrt{18 \cdot (18-16) \cdot (18-14) \cdot (18-6)} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} = 24\sqrt{3}.$$

Trójkąt BCD jest równoramienny, więc wysokość h opuszczona na bok CD jest równa

$$h = \sqrt{a^2 - 7^2} = \sqrt{a^2 - 49}.$$

Zatem

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot 14 \sqrt{a^2 - 49} = 7\sqrt{a^2 - 49}.$$

Ponieważ trójkąty ADC i BCD mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka C, więc

$$\frac{P_{ADC}}{P_{BCD}} = \frac{6}{a},$$



czyli

$$\frac{24\sqrt{3}}{7\sqrt{a^2-49}} = \frac{6}{a},$$

$$4a\sqrt{3} = 7\sqrt{a^2-49}.$$

Stąd

$$48a^2 = 49(a^2 - 49),$$

$$48a^2 = 49a^2 - 49^2,$$

$$a^2 = 49^2.$$

Zatem

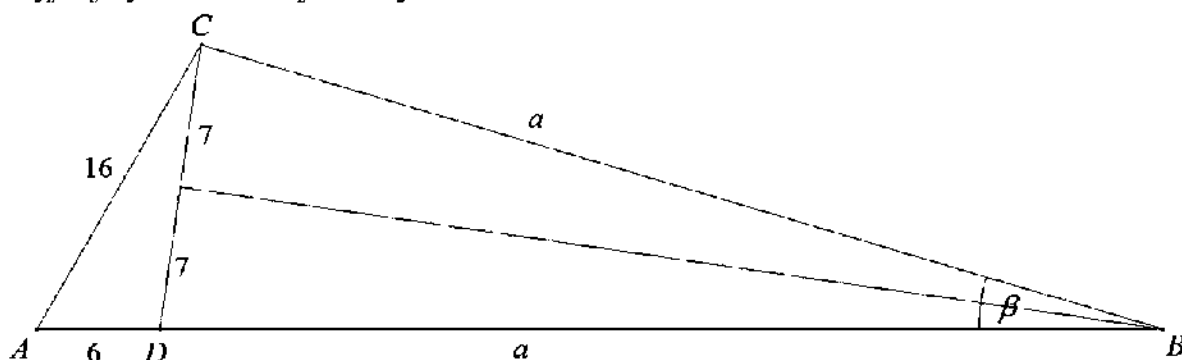
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### VIII sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczmy pole trójkąta  $ADC$  ze wzoru Herona.

Połowa obwodu tego trójkąta jest równa  $p = \frac{16+14+6}{2} = 18$ , więc

$$P_{ADC} = \sqrt{18 \cdot (18-16) \cdot (18-14) \cdot (18-6)} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} = 24\sqrt{3}.$$

Pola trójkątów  $ABC$  i  $BCD$  są równe odpowiednio

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot (a+6) \cdot a \cdot \sin \beta \quad \text{oraz} \quad P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \beta.$$

Ponieważ,  $P_{ABC} = P_{BDC} + P_{ADC}$ , więc

$$\frac{1}{2} \cdot (a+6) \cdot a \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin \beta + 24\sqrt{3},$$

$$a^2 \sin \beta + 6a \sin \beta = a^2 \sin \beta + 48\sqrt{3},$$

$$a \sin \beta = 8\sqrt{3},$$

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{\sin \beta}$$

$$a = \frac{8\sqrt{3}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

$$(1) \quad a = \frac{4\sqrt{3}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$$

Ponieważ trójkąt  $BCD$  jest równoramienny, więc wysokość opuszczona na podstawę  $CD$  dzieli ten trójkąt na dwa przystające trójkąty prostokątne. Zatem

$$(2) \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{7}{a}$$

Z jedynki trygonometrycznej otrzymujemy

$$(3) \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}} = \sqrt{1 - \frac{49}{a^2}}$$

Z (1), (2) i (3) otrzymujemy równanie z niewiadomą  $a$

$$a = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{7}{a} \sqrt{1 - \frac{49}{a^2}}}$$

Stąd

$$a \cdot \frac{7}{a} \sqrt{1 - \frac{49}{a^2}} = 4\sqrt{3},$$

$$7 \sqrt{1 - \frac{49}{a^2}} = 4\sqrt{3},$$

$$49 \left(1 - \frac{49}{a^2}\right) = 48,$$

$$49 - \frac{49^2}{a^2} = 48,$$

$$1 = \frac{49^2}{a^2},$$

$$a^2 = 49^2.$$

Zatem

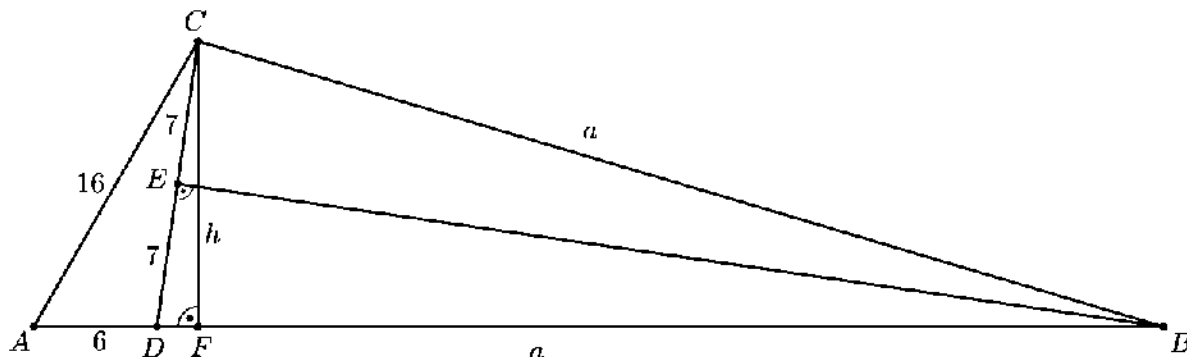
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

#### IX sposób

Poprowadźmy wysokości  $CF$  i  $BE$  trójkąta  $BCD$  i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczmy pole trójkąta  $ADC$  ze wzoru Herona.

Półowa obwodu tego trójkąta jest równa  $p = \frac{16 + 14 + 6}{2} = 18$ , więc

$$P_{ADC} = \sqrt{18 \cdot (18-16) \cdot (18-14) \cdot (18-6)} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} = 24\sqrt{3}.$$

Odcinek  $CF$  jest też wysokością trójkąta  $ADC$ , więc pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3h.$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned} 3h &= 24\sqrt{3}, \\ h &= 8\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $CDF$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} |DF|^2 &= |CD|^2 - |CF|^2, \\ |DF|^2 &= 14^2 - (8\sqrt{3})^2 = 4. \end{aligned}$$

Stąd  $|DF| = 2$ .

Trójkąt  $BCD$  jest równoramienny, więc spodek  $E$  wysokości  $BE$  tego trójkąta jest środkiem podstawy  $CD$ . Zatem

$$|DE| = \frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7.$$

Trójkąty  $CDF$  i  $BDE$  są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $D$ . Zatem

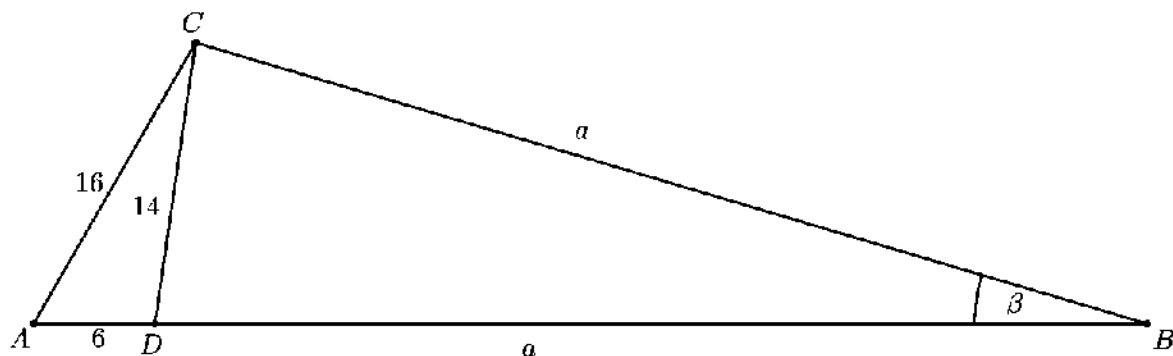
$$\begin{aligned} \frac{|DB|}{|DE|} &= \frac{|CD|}{|DF|}, \\ \frac{a}{14} &= \frac{7}{2}, \\ a &= 49. \end{aligned}$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

#### X sposób

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BCD$  otrzymujemy

$$14^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos \beta.$$

Stąd

$$\cos \beta = \frac{2a^2 - 14^2}{2a^2}.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $ABC$  otrzymujemy

$$16^2 = (a+6)^2 + a^2 - 2 \cdot (a+6) \cdot a \cdot \cos \beta.$$

Stąd i z poprzednio otrzymanego równania otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą  $a$

$$16^2 = (a+6)^2 + a^2 - 2 \cdot (a+6) \cdot a \cdot \frac{2a^2 - 14^2}{2a^2},$$

$$256a = a(a+6)^2 + a^3 - (a+6)(2a^2 - 196),$$

$$256a = a^3 + 12a^2 + 36a + a^3 - 2a^3 - 12a^2 + 196a + 6 \cdot 196,$$

$$24a = 6 \cdot 196,$$

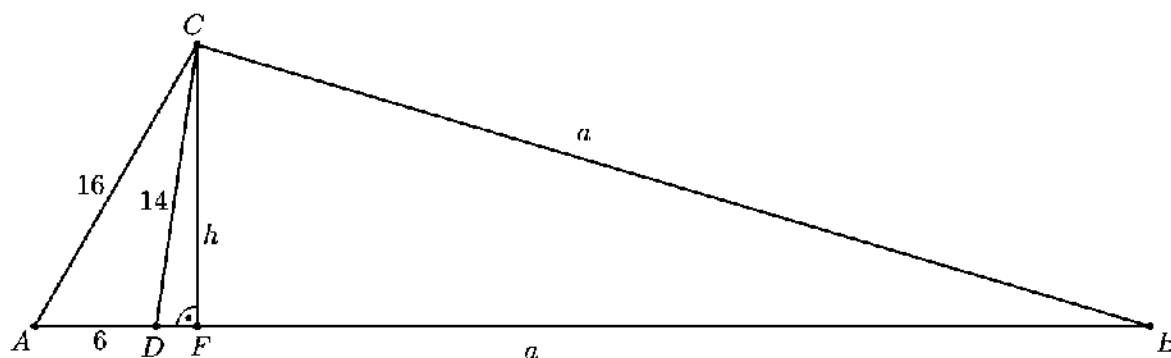
$$a = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

### XI sposób

Poprowadźmy wysokość  $CF$  trójkąta  $BCD$  i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczmy pole trójkąta  $ADC$  ze wzoru Herona.

Połowa obwodu tego trójkąta jest równa  $p = \frac{16+14+6}{2} = 18$ , więc

$$P_{ADC} = \sqrt{18 \cdot (18-16) \cdot (18-14) \cdot (18-6)} = \sqrt{18 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 12} = 24\sqrt{3}.$$

Odcinek  $CF$  jest też wysokością trójkąta  $ADC$ , więc pole tego trójkąta jest równe

$$P_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot h = 3h.$$

Otrzymujemy zatem

$$3h = 24\sqrt{3},$$

$$h = 8\sqrt{3}.$$

Pole trójkąta  $BCD$  jest więc równe

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot a = 4\sqrt{3} \cdot a.$$

Zapiszmy pole trójkąta  $ABC$ , stosując wzór Herona. Połowa obwodu trójkąta  $ABC$  jest równa

$$p = \frac{a+6+a+16}{2} = a+11,$$

więc

$$P_{ABC} = \sqrt{(a+11)(a+11-16)(a+11-a-6)(a+11-a)} = \sqrt{(a+11)(a-5) \cdot 5 \cdot 11}.$$

Ponieważ  $P_{ABC} = P_{ACD} + P_{BCD}$ , więc otrzymujemy

$$\sqrt{(a+11)(a-5) \cdot 5 \cdot 11} = 24\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cdot a.$$

Obie strony tego równania są dodatnie, więc podnosząc je do kwadratu otrzymujemy równanie równoważne

$$(a+11)(a-5) \cdot 5 \cdot 11 = 1728 + 576a + 48a^2,$$

$$55a^2 + 330a - 3025 = 48a^2 + 576a + 1728.$$

$$7a^2 - 246a - 4753 = 0.$$

$$\Delta = (-246)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-4753) = 193600, \sqrt{\Delta} = 440,$$

$$a = \frac{246 - 440}{14} < 0 \text{ lub } a = \frac{246 + 440}{14} = 49.$$

Obwód trójkąta  $ABC$  jest równy

$$L_{ABC} = 16 + 6 + 2 \cdot 49 = 120.$$

**Zadanie 9. (0–6)**

III. Modelowanie matematyczne.	3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.a).
--------------------------------	--

**Schemat punktowania**

Rozwiązanie składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na wyznaczeniu wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których funkcja kwadratowa  $f$  ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, a więc na rozwiązaniu nierówności  $2m+1 \neq 0$  oraz  $\Delta > 0$ :  $m \neq -\frac{1}{2}$  i  $m \in \left(-\frac{4}{7}, 4\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.

Zdający otrzymuje **1 punkt** za I etap rozwiązania, jeśli rozwiąże warunek  $\Delta > 0$ :  $m \in \left(-\frac{4}{7}, 4\right)$ .

Uwaga

Jeżeli zdający rozwiąże nierówność  $\Delta \geq 0$  i nie odrzuci przypadku  $\Delta = 0$  lub pominie założenie  $2m+1 \neq 0$ , to za ten etap otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na wyznaczeniu tych wartości parametru  $m$ , dla których pierwiastki  $x_1, x_2$  spełniają warunek  $(x_1 - x_2)^2 \geq 1 - 5x_1x_2$ . Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **3 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania.

Zdający otrzymuje **3 punkty**, gdy wyznaczy wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których prawdziwa jest nierówność  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 1 - 5x_1x_2$ :  $m \in \left(-5, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Zdający otrzymuje **2 punkty**, gdy zapisze nierówność wymierną z jedną niewiadomą  $m$ ,

$$\text{np.: } \left(\frac{-(m+2)}{2m+1}\right)^2 + \frac{m-3}{2m+1} - 1 \geq 0$$

Zdający otrzymuje **1 punkt**, gdy

- zapisze nierówność w postaci nierówności z niewiadomymi  $x_1 \cdot x_2$  i  $x_1 + x_2$ ,  
np.:  $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \geq 1 - 5x_1x_2$

albo

- zapisze nierówność z niewiadomą  $m$ , ale nie będzie to nierówność wymierna, np.:

$$\left(\frac{-(m+2) - \sqrt{-7m^2 + 24m + 16}}{2(2m+1)} - \frac{-(m+2) + \sqrt{-7m^2 + 24m + 16}}{2(2m+1)}\right)^2 \geq$$

$$\geq 1 - 5 \cdot \frac{-(m+2) - \sqrt{-7m^2 + 24m + 16}}{2(2m+1)} \cdot \frac{-(m+2) + \sqrt{-7m^2 + 24m + 16}}{2(2m+1)}$$

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności z etapów I i II oraz podaniu odpowiedzi:  $m \in \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwagi**

- W przypadku otrzymania na jednym z etapów – I lub II – zbioru pustego lub zbioru  $R$  jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.

2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem lub nadzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. W przypadku rozwiązania z błędami, nieprzekreślającymi poprawności rozumowania, za ostatni etap przyznajemy **1 punkt** jedynie wówczas, gdy zdający poprawnie wykona etap I i popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II lub gdy popełnia błędy w etapie I i dobrze rozwiąże etap II (uwaga 3. ma zastosowanie, gdy nie zachodzą przypadki 1. i 2.).

### Przykładowe rozwiązanie

Na to, aby funkcja kwadratowa  $f$  miała dwa różne pierwiastki rzeczywiste potrzeba i wystarcza, żeby spełnione były następujące warunki:  $2m+1 \neq 0$  oraz  $\Delta > 0$ . Zatem  $m \neq -\frac{1}{2}$  oraz

$$\begin{aligned}(m+2)^2 - 4(2m+1)(m-3) &> 0, \\ m^2 + 4m + 4 - 4(2m^2 - 5m - 3) &> 0, \\ -7m^2 + 24m + 16 &> 0, \\ -7m^2 + 28m - 4m + 16 &> 0, \\ -7m(m-4) - 4(m-4) &> 0, \\ -(m-4)(7m+4) &> 0 \\ m &\in \left(-\frac{4}{7}, 4\right).\end{aligned}$$

Warunek  $(x_1 - x_2)^2 \geq 1 - 5x_1x_2$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$\begin{aligned}x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 &\geq 1 - 5x_1x_2, \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 &\geq 1 - 5x_1x_2, \\ (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 - 1 &\geq 0.\end{aligned}$$

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left(\frac{-(m+2)}{2m+1}\right)^2 + \frac{m-3}{2m+1} - 1 &\geq 0, \\ \frac{(m+2)^2 + (m-3)(2m+1) - (2m+1)^2}{(2m+1)^2} &\geq 0, \\ \frac{m^2 + 4m + 4 + 2m^2 - 5m - 3 - 4m^2 - 4m - 1}{(2m+1)^2} &\geq 0, \\ \frac{-m^2 - 5m}{(2m+1)^2} &\geq 0 \\ -m(m+5)(2m+1)^2 &\geq 0, \\ m &\in \left(-5, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right).\end{aligned}$$

W rezultacie wszystkie warunki zadania są spełnione dla

$$m \neq -\frac{1}{2} \text{ i } m \in \left(-\frac{4}{7}, 4\right) \text{ i } m \in \left(-5, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

czyli dla  $m \in \left(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ .

**Zadanie 10. (0–3)**

III. Modelowanie matematyczne.	10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych. (R10.a).
--------------------------------	--

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne** ..... 3 p.Zdający obliczy szukane prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{8}{27}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 2 p.

Zdający

- obliczy  $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$  i zapisze, że zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są ciągi postaci:  $(a, b, a)$ ,  $(a, a, b)$ ,  $(b, a, a)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  i  $a \neq b$

albo

- obliczy  $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$  i  $|A| = 9 \cdot 8 \cdot 3 = 216$  lub  $|A| = \binom{9}{2} \cdot 6 = 216$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 1 p.

Zdający

- obliczy  $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$

albo

- zapisze, że zdarzeniami elementarnymi sprzyjającymi zdarzeniu  $A$  są ciągi postaci:  $(a, b, a)$ ,  $(a, a, b)$ ,  $(b, a, a)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  i  $a \neq b$ ,

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Przykładowe rozwiązanie**

Jest to model klasyczny. Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych  $\Omega$  jest zbiorem wszystkich ciągów  $(a, b, c)$ , gdzie  $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . Zatem  $|\Omega| = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ .

Nicem  $A$  oznacza zdarzenie polegające na tym, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe.

Zdarzeniu  $A$  sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne postaci  $(a, b, a)$ ,  $(a, a, b)$ ,  $(b, a, a)$ , gdzie  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  i  $a \neq b$ . Ciągów każdej z tych postaci jest  $9 \cdot 8 \cdot 1$ . Zatem

liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$  jest równa

$$|A| = 9 \cdot 8 \cdot 3.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 3}{9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{8}{27}.$$



**Zadanie 11. (0–6)**

IV. Użycie i tworzenie strategii.	9. Stereometria. Zdający wyznacza związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii (9.b).
-----------------------------------	---

**Schemat punktowania****Rozwiązanie pełne** ..... 6 p.Zdający obliczy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:  $P_c = 1416$ .**Rozwiązanie prawie pełne** ..... 5 p.

Zdający

- obliczy wysokości ścian bocznych ostrosłupa, zapisze wzór na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa:  $h_a = 15$  i  $h_b = 20$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- obliczy pole powierzchni całkowitej ostrosłupa, popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania** ..... 4 p.Zdający obliczy wysokość ostrosłupa:  $h = 12$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.UwagaJeśli zdający zapisze równanie z niewiadomą  $h$  (lub  $\text{tg}\alpha$  lub  $\text{tg}\beta$ ) i na tym poprzestanie, to otrzymuje 3 punkty.**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** ..... 2 p.Zdający wyznaczy tangensy obu kątów  $\alpha$  i  $\beta$  w zależności od wysokości ostrosłupa orazzapisze zależność między tangensami tych kątów:  $\text{tg}\alpha = \frac{h}{9}$ ,  $\text{tg}\beta = \frac{h}{16}$ ,  $\text{tg}\beta = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$ 

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 p.

Zdający

- wyznaczy tangens jednego z kątów  $\alpha$  lub  $\beta$  w zależności od wysokości ostrosłupa:

$$\text{tg}\alpha = \frac{h}{9}, \text{tg}\beta = \frac{h}{16}$$

albo

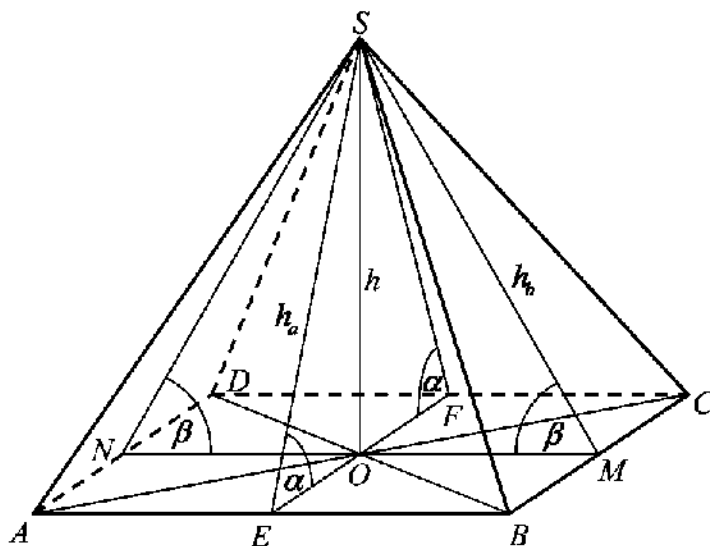
- zapisze zależność między tangensami kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , np.:  $\text{tg}\beta = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Uwaga**Jeżeli zdający prowadzi poprawne rozumowanie, w którym przyjmuje, że kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są dane, ale nie sprawdza, czy spełniają warunek:  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , to może otrzymać co najwyżej 4 punkty za całe rozwiązanie.

**Przykładowe rozwiązanie**

Ponieważ przeciwległe ściany boczne  $ABS$  i  $CDS$  są nachylone do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod tym samym kątem, więc trójkąt  $EFS$ , w którym wierzchołki  $E$  i  $F$  to rzuty prostopadłe punktu  $S$  na proste odpowiednio  $AB$  i  $CD$ , jest równoramienny. Stąd wynika, że spodek  $O$  wysokości  $SO$  ostrosłupa leży na osi symetrii prostokąta  $ABCD$  przechodzącej przez środki boków  $BC$  i  $AD$ . Tak samo wnioskujemy, że  $O$  leży na osi symetrii prostokąta  $ABCD$  przechodzącej przez środki boków  $AB$  i  $CD$ . Zatem  $O$  to środek symetrii podstawy ostrosłupa, a punkty  $E, M, F$  i  $N$  są środkami krawędzi tej podstawy. Pozostałe oznaczenia przyjmijmy jak na rysunku.



Długości odcinków  $MO$  i  $EO$  są równe  $|MO| = \frac{1}{2}|AB| = 16$  i  $|EO| = \frac{1}{2}|BC| = 9$ .

Z definicji tangensa kąta ostrego w trójkącie  $EOS$  i w trójkącie  $MOS$  otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{|EO|} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{|MO|},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{9} \quad \text{i} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{16}.$$

Ponieważ  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , więc  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ . Stąd

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1,$$

$$\frac{h}{9} \cdot \frac{h}{16} = 1,$$

$$h^2 = 9 \cdot 16,$$

$$h = 3 \cdot 4 = 12.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $EOS$  i  $MOS$  otrzymujemy

$$h_a^2 = |EO|^2 + h^2 \quad \text{i} \quad h_b^2 = |NO|^2 + h^2,$$

$$h_a^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \quad \text{i} \quad h_b^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400,$$

$$h_a = 15 \quad \text{i} \quad h_b = 20.$$

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe

$$P_c = P_{ABCD} + 2P_{ABS} + 2P_{DCS} = 18 \cdot 32 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 15 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 20 = 1416.$$