CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2019/2020

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA")

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1A1P-203

CZERWIEC 2020

Egzaminatorze!

- Oceniaj prace zdających uczciwie i z zaangażowaniem.
- **Stosuj przyjęte zasady oceniania w sposób obiektywny**. Pamiętaj, że każda merytorycznie poprawna odpowiedź, spełniająca warunki określone w poleceniu, musi zostać pozytywnie oceniona, nawet jeżeli nie została przewidziana w przykładowych odpowiedziach w zasadach oceniania.
- Konsultuj niejednoznaczne rozwiązania zadań z innymi egzaminatorami lub przewodniczącym zespołu egzaminatorów. W przypadku niemożności osiągnięcia wspólnego stanowiska, rozstrzygajcie na korzyść zdającego.
- Przyznając punkty, nie kieruj się emocjami.
- Informuj przewodniczącego o wszystkich nieprawidłowościach zaistniałych w trakcie oceniania, w tym podejrzeń o niesamodzielność w pisaniu pracy.

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	**D**	**C**	**C**	**B**

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zadanie 5. (0–2)

Suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 2, a suma kwadratów wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 3. Oblicz iloraz ciągu (a_n).

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności, części dziesiętnych i setnych otrzymanego wyniku.

Przykładowe rozwiązanie

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 2, zatem $\frac{a_1}{1-q} = 2$.

Suma kwadratów wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa 3, a zatem $\frac{a_1^2}{1-q^2} = 3$.

Stąd wynika, że $7q^2 - 8q + 1 = 0$.

Rozwiązaniami równania są $q = \frac{1}{7}$ lub $q = 1$.

Rozwiązanie $q = 1$ jest sprzeczne, ponieważ nie spełnia warunku zbieżności nieskończonego ciągu geometrycznego $|q| < 1$. Zatem $q = \frac{1}{7} = 0,(142857)$.

Zad 5.

0	1	4

Zadanie 6. (0–3)

Pierwszy wyraz ciągu (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 2. Wszystkie wyrazy tego ciągu spełniają warunek $a_n = 3 \cdot a_{n+1} + n^2$. Oblicz sumę $a_1 + a_2 + a_3$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy kolejno wyrazy;

dla $n = 1$ otrzymujemy: $a_1 = 3 \cdot a_2 + 1$, czyli $a_2 = \frac{1}{3}$,

dla $n = 2$ otrzymujemy: $a_2 = 3 \cdot a_3 + 4$, czyli $a_3 = -\frac{11}{9}$.

Stąd $a_1 + a_2 + a_3 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{11}{9} = \frac{10}{9}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy obliczy drugi wyraz ciągu (a_n): $a_2 = \frac{1}{3}$

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy obliczy trzeci wyraz ciągu (a_n): $a_3 = -\frac{11}{9}$

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy obliczy sumę $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{10}{9}$.

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest czworokąt wypukły, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty A, B, C i D. Wykaż, że jeżeli $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB|$, to $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$.

Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Niech $a = |AB|$, $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, r_1 – promień okręgu opisanego na trójkącie ACB,

r_2 – promień okręgu opisanego na trójkącie ADB.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ACB i dla trójkąta ADC wynika, że

$$\frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ACB} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{|AB|}{\sin \sphericalangle ADB} = 2r_2,$$

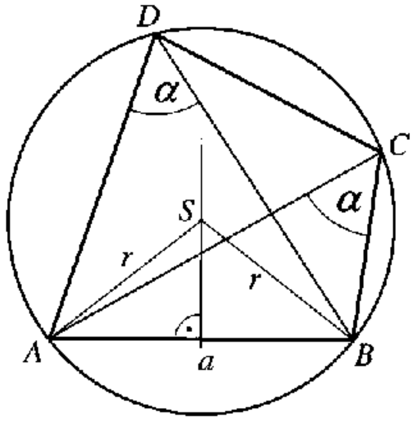
czyli

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2r_1 \text{ oraz } \frac{a}{\sin \alpha} = 2r_2.$$

Stąd wynika, że $r_1 = r_2$.

Ponieważ odcinek AB jest wspólnym bokiem trójkątów ACB i ADB, więc środki okręgów opisanych na tych trójkątach leżą na symetralnej tego boku. Z faktu, że czworokąt $ABCD$ jest wypukły, wynika natomiast, że punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB.

Stąd i z równości $r_1 = r_2$ wynika, że środki obu tych okręgów pokrywają się, co oznacza, że okrąg opisany na trójkącie ACB jest jednocześnie okręgiem opisanym na trójkącie ADB.



Jest to więc okrąg opisany na czworokącie $ABCD$. Kąty BAC i BDC są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku BC. To kończy dowód.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....1 pkt

Zdający wykaże, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

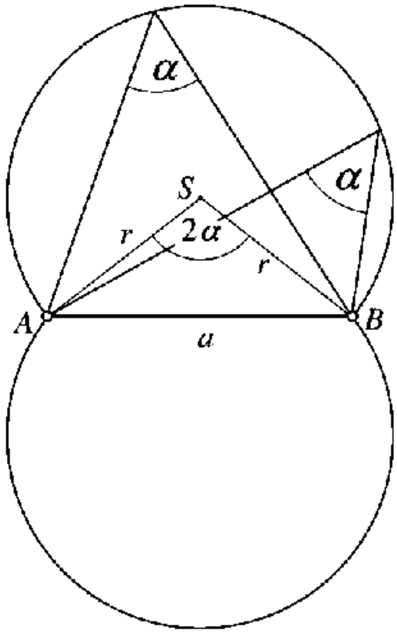
Zdający uzasadni, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

__Uwaga__
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach ACB i ADB pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

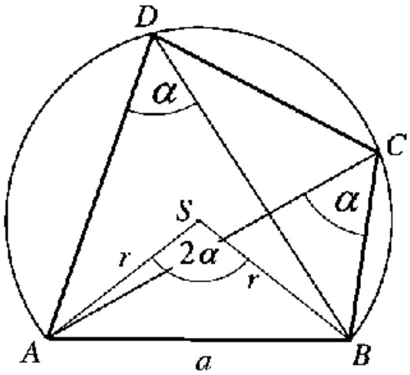
Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zdający uzasadni, że kąty BAC i BDC są równe.

II sposób
Miejscem geometrycznym punktów, z których odcinek AB widać pod tym samym kątem $\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$, jest suma łuków (bez końców) $\overset{\frown}{AB}$ okręgów, których ten odcinek jest wspólną cięciwą, przy czym łuk leżący po jednej stronie prostej AB jest symetryczny do łuku leżącego po drugiej stronie tej prostej.



Wierzchołki C i D czworokąta $ABCD$ leżą na jednym z tych łuków, gdyż czworokąt ten jest wypukły.
Oznacza to, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.



Kąty BAC i BDC są równe, gdyż są to kąty wpisane w ten okrąg, oparte na tym samym łuku BC. To kończy dowód.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....2 pkt

Zdający uzasadni, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg, odwołując się do miejsca geometrycznego punktów, z których odcinek AB widać pod tym samym kątem
$\alpha = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|$.

Uwaga
Jeżeli zdający z faktu, że promienie okręgów opisanych na trójkątach ACB i ADB są równe oraz z faktu, że środki tych okręgów leżą na tej samej prostej, wywnioskuje, że okręgi opisane na trójkątach ACB i ADB pokrywają się, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne ....3 pkt

Zdający uzasadni, że kąty BAC i BDC są równe .

Zadanie 8. (0–3)
Wykaż, że dla każdej liczby nieparzystej n wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ jest podzielne przez 16.

Rozwiązanie (I sposób)
Przekształcamy wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ równoważnie w następujący sposób

$$n^4 \cdot (n-3) - (n-3)$$
$$(n^4 - 1) \cdot (n-3)$$
$$(n^2 - 1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$
$$(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2 + 1) \cdot (n-3)$$

Liczba n jest nieparzysta więc liczby $(n-1), (n+1), (n^2+1), (n-3)$ są parzyste zatem ich iloczyn jest podzielny przez 2^4. Wyrażenie jest sumą dwóch składników podzielnych przez 16 więc jest podzielne przez 16.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze wyrażenie w postaci: $(n^4 - 1) \cdot (n-3) + 16$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy zapisze nierówność w postaci: $(n-1) \cdot (n+1) \cdot (n^2+1) \cdot (n-3) + 16$ i nie uzasadni podzielności przez 16.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie (II sposób)
Ponieważ liczba n jest nieparzysta możemy zapisać ją w postaci $2k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą.
Wyrażenie $n^5 - 3n^4 - n + 3$ przyjmuje postać:

$(2k+1)^5-3(2k+1)^4-(2k+1)+3$.

Po przekształceniu wyrażenia równoważnie otrzymujemy
$32n^5+32n^4-16n^3-32n^2-16n+16$,

stąd wyrażenie możemy zapisać w postaci iloczynu $16(2n^5+2n^4-n^3-2n^2-n+1)$, który jako iloczyn liczby 16 oraz całkowitej liczby $(2n^5+2n^4-n^3-2n^2-n+1)$ jest podzielny przez 16.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze wraz z odpowiednimi założeniami wyrażenie $(2k+1)^5-3(2k+1)^4-(2k+1)+19$ i przekształci poprawnie przynajmniej jedno z wyrażeń.

$(2k+1)^5=32n^5+80n^4+80n^3+40n^2+10n+1$ lub

$(2k+1)^4=16n^4+32n^3+24n^2+8n+1$.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

gdy doprowadzi wyrażenie do postaci $32n^5+32n^4-16n^3-32n^2-16n+16$ i nie uzasadni, że to wyrażenie jest podzielne przez 16.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $4\sin^3 x+\sin 2x=2\sin^2 x\cdot(2\cos x+1)$.

Rozwiązanie (I sposób)

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x+2\sin x\cos x=4\sin^2 x\cos x+2\sin^2 x$$
$$4\sin^3 x+2\sin x\cos x-4\sin^2 x\cos x-2\sin^2 x=0$$
$$2\sin x\left(2\sin^2 x+\cos x-2\sin x\cos x-\sin x\right)=0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x=0 \text{ lub } 2\sin^2 x+\cos x-2\sin x\cos x-\sin x=0$$
$$\sin x=0 \text{ lub } 2\sin x(\sin x-\cos x)+\cos x-\sin x=0$$
$$\sin x=0 \text{ lub } (\sin x-\cos x)(2\sin x-1)=0$$

Zatem

$$\sin x=0 \text{ lub } \sin x=\cos x \text{ lub } \sin x=\frac{1}{2}$$

Zauważmy, że drugie równanie tej alternatywy jest równoważne równaniu $\mathrm{tg}\, x=1$.

Gdyby zachodziło $\cos x = 0$, to otrzymalibyśmy równość $\sin x = 0$, a to byłoby sprzeczne z tożsamością $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ostatecznie zapisujemy cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania

..1p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.. 2p.

Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu

$$\left(\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x\right)(2\sin x - 1) = 0 \text{ lub } \left(2\sin^2 x - \sin 2x\right)(2\sin x - 1) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3p.

Zdający poprawnie rozwiąże **dwa spośród trzech równań**:

$$\sin x = 0,\ 2\sin x - 1 = 0,\ \sin x - \cos x = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

Rozwiązanie pełne...4p.

Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Rozwiązanie (II sposób)

Przekształcamy równanie równoważnie:

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x\cos x + 2\sin^2 x$$

$$4\sin^3 x + 2\sin x\cos x - 4\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x = 0$$

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

Stąd otrzymujemy alternatywę

$$\sin x = 0 \text{ lub } 2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$$

Równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x - 0$ zapisujemy w postaci

$$2\sin^2 x - (2\cos x + 1)\sin x + \cos x = 0$$

i rozwiązujemy je tak samo jak równanie kwadratowe z niewiadomą $\sin x$ i parametrem $\cos x$.

Otrzymujemy wtedy wyróżnik $\Delta = (2\cos x - 1)^2$ oraz dwa rozwiązania:

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

Jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$. Zatem w tym przypadku

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

Jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to otrzymujemy rozwiązania $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$. W tym przypadku

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi .$$

Ostatecznie możemy zapisać cztery serie rozwiązań podanego równania:

$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania
Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania
...1p.
Zdający zapisze dane równanie w postaci iloczynu, np.

$$2\sin x\left(2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x\right) = 0$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp... 2p.
Zdający zapisze równanie $2\sin^2 x + \cos x - 2\sin x\cos x - \sin x = 0$ w postaci

$$2\sin^2 x - (2\cos x + 1)\sin x + \cos x = 0 ,$$

obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego z lewej strony równania $\Delta = (2\cos x - 1)^2$ i zapisze dwa rozwiązania tego równania

$$\sin x = \frac{2\cos x + 1 - |2\cos x - 1|}{4} \text{ lub } \sin x = \frac{2\cos x + 1 + |2\cos x - 1|}{4}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3p.
Zdający rozpatrzy poprawnie jeden z przypadków:

- jeśli $\cos x \geq \frac{1}{2}$, to $\sin x = \frac{1}{2}$ lub $\sin x = \cos x$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

albo

- jeśli zaś $\cos x < \frac{1}{2}$, to $\sin x = \cos x$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$.

  Zatem w tym przypadku $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy .

Rozwiązanie pełne..4p.
Zdający zapisze cztery serie rozwiązań danego równania:
$x = k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ lub $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **lub** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający dzieli obie strony równania przez $\sin x$ **i** przez $(2\sin x - 1)$, bez zapisania odpowiedniego komentarza opisującego przypadki $\sin x = 0$ oraz $2\sin x - 1 = 0$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
3. Jeżeli zdający w rozwiązaniach nie uwzględni okresowości funkcji trygonometrycznych i zapisuje przykładowe rozwiązania z każdej serii, np. $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{\pi}{4}$, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu fałszywe równości, np. $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, to za całe rozwiązanie może otrzymać najwyżej **2 punkty**, o ile wcześniej nie nabył praw do **3 punktów**.
5. Jeżeli zdający stosuje w rozwiązaniu równość $\sin x \cdot \cos x = \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x$, bez odpowiedniego komentarza, to za całe rozwiązanie może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający podczas doprowadzania równania do postaci iloczynu stosuje nieistniejące „wzory" skróconego mnożenia, np.
   $$(a - b - c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{lub} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2),$$
   to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**, o ile wcześniej nie nabył praw do **1 punktu**.

Zadanie 10. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych $a > 1$, $b > 1$ i $N > 1$ jest spełniona równość

$$\log_{a^2 b} N = \frac{3}{20} \cdot \left(\log_a N + \log_b N\right).$$

Wyznacz wszystkie wartości wyrażenia $\log_a b$.

Rozwiązanie

Wprowadzamy jednakową podstawę a dla logarytmów i otrzymujemy:

$$\frac{20\log_a N}{\log_a \left(a^2 b\right)} = 3\left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$$

Ponieważ $\log_a N \neq 0$, więc powyższa równość jest równoważna równości

$$\frac{20}{2+\log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

Zapisujemy zatem kolejno:

$$20\log_a b = 3\log_a b\left(2+\log_a b\right) + 3\left(2+\log_a b\right)$$

$$3\left(\log_a b\right)^2 - 11\log_a b + 6 = 0.$$

To równanie ma dwa rozwiązania $\log_a b = 3$ lub $\log_a b = \frac{2}{3}$, będące poszukiwanymi wartościami wyrażenia $\log_a b$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania
……………………………………………………………………………………………1p.

Zdający zapisze podaną równość w postaci $\frac{20\log_a N}{\log_a \left(a^2 b\right)} = 3\left(\log_a N + \frac{\log_a N}{\log_a b}\right)$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp
……………………………………………………………………………………………2p.

Zdający zapisze równanie wymierne z niewiadomą $\log_a b$.

$$\frac{20}{2+\log_a b} = 3 + \frac{3}{\log_a b}$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania……………………………………………………………………………3p.

Zdający przekształci powyższe równanie do postaci równania kwadratowego, np.

$$20\log_a b = 3\log_a b\left(2+\log_a b\right) + 3\left(2+\log_a b\right)$$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Rozwiązanie pełne……………………………………………………………………………………4p.

Zdający rozwiąże powyższe równanie i zapisze, że szukane wyrażenie przyjmuje dwie wartości:

$$\log_a b = 3 \text{ lub } \log_a b = \frac{2}{3}.$$

Uwagi:

1. Akceptujemy zapisanie odpowiedzi w postaci: $\log_b a = \frac{3}{2}$ lub $\log_b a = \frac{1}{3}$.
2. Jeśli zdający pominie kwadrat w wyrażeniu $\log_{a^2b} N$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, otrzymując odpowiedź: $\log_a b = \frac{19}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeśli zdający korzysta w rozwiązaniu z fałszywych równości, np. $\log_{a^2b} N = \frac{1}{2}\log_{ab} N$, to otrzymuje **0 punktów**, chyba że wcześniej nabył praw do 1 punktu.

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których nierówność

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x>2mx-2$$

jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

Rozwiązanie

Zapiszemy nierówność w następującej postaci

$$\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x\left(1-m\right)+2>0$$

Zauważamy, że $m^2+4m-5=\left(m-1\right)\left(m+5\right)$. Wynika stąd, że należy rozważyć dwie sytuacje:

- nierówność liniowa
  1) Jeśli $m=1$, to otrzymujemy nierówność $2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.
  2) Jeśli $m=-5$, to otrzymujemy nierówność $12x+2>0$, która jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej $x>-\frac{1}{6}$.
- nierówność kwadratowa
  3) Jeśli $m\neq 1$ i $m\neq -5$, to należy sprawdzić, kiedy zachodzą jednocześnie dwie nierówności:

$$a>0 \text{ i } \Delta<0,$$

gdzie $a=\left(m-1\right)\left(m+5\right)$ jest współczynnikiem trójmianu $\left(m^2+4m-5\right)\cdot x^2+2x\left(1-m\right)+2$ przy najwyższej potędze zmiennej x, zaś $\Delta=b^2-4ac$ jest wyróżnikiem tego trójmianu. Zapisujemy kolejno:

$$\left(m-1\right)\left(m+5\right)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1.$$

$$\Delta=4\left(1-m\right)^2-4\left(m-1\right)\left(m+5\right)\cdot 2=4\left(m-1\right)^2-8\left(m-1\right)\left(m+5\right)=-4\left(m-1\right)\left(m+11\right)$$

$$-4\left(m-1\right)\left(m+11\right)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1.$$

Zatem nierówności $a>0$ i $\Delta<0$ zachodzą jednocześnie dla $m<-11$ lub $m>1$.

Łącząc wyniki z punktów 1) i 3), otrzymujemy odpowiedź ostateczną: $m<-11$ lub $m\geq 1$.

Schemat punktowania

Składa się on z dwóch części.

Pierwsza, to rozpatrzenie przypadku nierówności liniowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie **2 punkty**.

Druga, to rozpatrzenie przypadku nierówności kwadratowej. Zdający może za tę część otrzymać maksymalnie 3 **punkty**.

Schemat punktowania części pierwszej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zauważy i zapisze, że dla $m=1$ albo dla $m=-5$ podana nierówność jest liniowa i poprawnie zbada jeden z tych przypadków.

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie określi, że dla $m=1$ nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x, zaś dla $m=-5$ tak nie jest.

Schemat punktowania części drugiej

1 punkt przyznajemy zdającemu, który zapisze, że nierówność kwadratowa jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x wtedy, gdy parametr m spełnia układ nierówności

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } \Delta<0$$

albo

$$m^2+4m-5>0 \text{ i } y_W>0, \text{ gdzie } y_W=-\frac{\Delta}{4a}$$

2 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże jedną z dwóch nierówności

$$m^2+4m-5>0, \text{ czyli } (m-1)(m+5)>0 \Leftrightarrow m<-5 \text{ lub } m>1$$

lub

$$\Delta=-4(m-1)(m+11)<0$$

$$-4(m-1)(m+11)<0 \Leftrightarrow m<-11 \text{ lub } m>1$$

3 punkty przyznajemy zdającemu, który poprawnie rozwiąże obie nierówności $a>0$ i $\Delta<0$

oraz

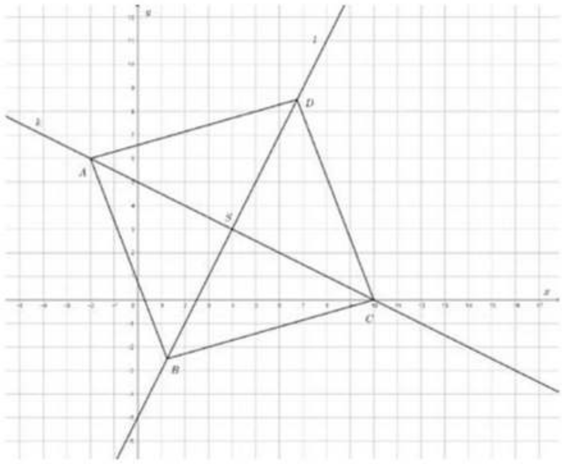
zapisze końcową odpowiedź do zadania: Dla $m<-11$ lub $m\geq 1$ podana nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x.

Uwagi:

1. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze jedynie nierówność $\Delta<0$ i nawet bezbłędnie tę nierówność rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający zapisze w drugiej części rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5\neq 0$ i $\Delta<0$,
   a następnie konsekwentnie rozwiąże ten układ do końca, to za drugą część rozwiązania może otrzymać maksymalnie **1 punkt**.
3. Jeśli zdający w części drugiej rozwiązania zapisze układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta>0$,
   a następnie nawet bezbłędnie ten układ rozwiąże, to za tę część otrzymuje **0 punktów**.
   Jeśli zdający zapisze w części drugiej rozwiązania układ nierówności $m^2+4m-5>0$ i $\Delta\leq 0$,
   i konsekwentnie rozwiąże tę część do końca, to za tę część może otrzymać maksymalnie
   2 punkty.

Zadanie 12. (0–6)

Punkt $A=(-2,6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu 82,5. Przekątna BD zawiera się w prostej l o równaniu $2x-y-5=0$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.



Rozwiązanie (I sposób)

Wyznaczamy równanie prostej k zawierającej przekątną AC rombu (prosta k jest prostopadła do prostej l, punkt A leży na prostej k.

$k: y=-\frac{1}{2}x+5$

Z układu równań $\begin{cases} y=2x-5 \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktu $S=(4,3)$ (środek symetrii rombu). Punkt S jest jednocześnie środkiem przekątnej AC, co pozwala obliczyć współrzędne wierzchołka $C=(10,0)$.

Obliczamy długość przekątnej $|AC|=6\sqrt{5}$, a następnie, wykorzystując informację o polu rombu, obliczamy długość drugiej przekątnej.

$\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|=82,5$

$\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{5}\cdot|BD|=82,5$

$|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$

Punkty B oraz D leżą na okręgu o środku $S=(4,3)$ i promieniu $\frac{1}{2}|BD|=\frac{11}{4}\sqrt{5}$ oraz na prostej l. Wyznaczamy ich współrzędne rozwiązując układ równań

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5\\ y=2x-5\end{cases}$$

Otrzymujemy punkty $B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$.

Uwaga
Długość odcinka AS można obliczyć również jako odległość punktu A od prostej l.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy
- wyznaczy równanie prostej
  $k: y=-\frac{1}{2}x+5$

albo
- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$, jako odległość punktu A od prostej l.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy
- wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów
  $S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$

albo
- wyznaczy $|AS|=3\sqrt{5}$, jako odległość punktu A od prostej l oraz obliczy długości przekątnych $|AC|=6\sqrt{5}$ oraz $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**

gdy wyznaczy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S=(4,3)$ oraz $C=(10,0)$ i długość przekątnej $|BD|=\frac{11}{2}\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów B oraz D,

np. $\begin{cases}(x-4)^2+(y-3)^2=\frac{121}{16}\cdot 5\\ y=2x-5\end{cases}$

Zdający otrzymuje .... **5 p.**

gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje .... **6 p.**

gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$B=\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$, $C=(10,0)$, $D=\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$.

Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczamy równanie prostej $k: y=-\frac{1}{2}x+5$ oraz obliczamy współrzędne punktu $C=(10,0)$ (jak w sposobie I). Zauważamy, że pole trójkąta ABC jest połową pola rombu $ABCD$ i wynosi $41\frac{1}{4}$. Wyznaczamy pole trójkąta ABC w zależności od współrzędnych punktu $B=(x_B, y_B)$

$P_{\Delta ABC}=\left|-6y_B-3x_B+30\right|$

Punkt B leży na prostej l, więc jego współrzędne spełniają równanie tej prostej.
Rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} \left|-6y_B-3x_B+30\right|=41\frac{1}{4} \\ y_B=2x_B-5 \end{cases}$$

Rozwiązaniami układu są dwie pary liczb $\left(\frac{5}{4},-\frac{5}{2}\right)$ oraz $\left(\frac{27}{4},\frac{17}{2}\right)$. Zauważamy, że takie same warunki spełnia punkt D (pole trójkąta ABD jest połową pola rombu oraz punkt D leży na prostej l. Wyciągamy wniosek, że otrzymane pary liczb to współrzędne wierzchołków B oraz D.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... **1 p.**
gdy wyznaczy równanie prostej

$k: y = -\frac{1}{2}x + 5$

Zdający otrzymuje .... **2 p.**
gdy

wyznaczy równanie prostej $k: y = -\frac{1}{2}x + 5$ oraz obliczy współrzędne punktów $S = (4,3)$ i $C = (10,0)$.

Zdający otrzymuje .... **3 p.**
gdy zauważy, że pole trójkąta *ABC* jest połową pola rombu *ABCD* i wynosi $41\frac{1}{4}$ i zapisze równanie $|-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4}$

Zdający otrzymuje .... **4 p.**
gdy zapisze układ równań wystarczający do obliczenia współrzędnych punktów *B* oraz *D*

$$\begin{cases} |-6y_B - 3x_B + 30| = 41\frac{1}{4} \\ y_B = 2x_B - 5 \end{cases}$$

Zdający otrzymuje .... **5 p.**
gdy rozwiąże zadanie do końca, popełniając błąd rachunkowy.

Zdający otrzymuje .... **6 p.**
gdy poprawnie rozwiąże układ równań i poda bezbłędnie odpowiedź

$$B = \left(1\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}\right), C = (10,0),\ D = \left(6\frac{3}{4}, 8\frac{1}{2}\right).$$

Rozwiązanie (III sposób)

Przyjmijmy oznaczenie współrzędnych punktu $C = (x_C, y_C)$. Wyznaczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AC} = [x_C + 2, y_c - 6]$.

Wektor $\overrightarrow{AC}$ jest prostopadły do prostej $2x - y - 5 = 0$ Istnieje zatem $p \in \mathbb{R}$, dla którego $\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$

Obliczamy długość wektora $\overrightarrow{AC}$ jako podwojoną odległość punktu *A* od prostej *l*.

$\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{5}$

Wtedy $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$ stąd $p = 6$ lub $p = -6$.

Zatem

$[x_C + 2, y_C - 6] = [12, -6]$ lub $[x_C + 2, y_C - 6] = [-12, 6]$

$C_1 = (10,0), \quad C_2 = (-14,12)$

Odrzucamy drugie rozwiązanie (np. na podstawie obserwacji, że środek odcinka AC_2 nie leży na prostej *l*. Dalej postępujemy, jak w I lub II sposobie.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... **1 p.**

gdy zapisze $\overrightarrow{AC} = [2p, -p]$, $\overrightarrow{AC} = [x_C + 2, y_c - 6]$ oraz obliczy $\overrightarrow{AC} = 6\sqrt{5}$.

Zdający otrzymuje .... **2 p.**

gdy rozwiąże równanie $\sqrt{(2p)^2 + (-p)^2} = 6\sqrt{5}$, wyznaczy współrzędne punktu $C_1 = (10, 0)$ i uzasadni odrzucenie drugiego rozwiązania.

Dalszą część rozwiązania oceniamy jak w sposobie I lub II.

Zadanie 13. (0–3)

Oblicz, ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że w zapisie dziesiętnym iloczyn wszystkich cyfr każdej z tych liczb jest równy 28.

Rozwiązanie

Zauważamy, że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka.

Cyfrę 7 możemy zapisać na jednym z siedmiu miejsc, cyfrę 4 na jednym z sześciu miejsc, a pozostałe pięć miejsc wypełnią jedynki.

Stosujemy regułę mnożenia: $7 \cdot 6 \cdot 1 = 42$.

Obliczamy ile jest siedmiocyfrowych liczb naturalnych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka. Wybieramy najpierw miejsce dla cyfry 7, następnie dwa miejsca dla dwóch cyfr 2, a pozostałe miejsca wypełnią jedynki.

Stosujemy kolejny raz regułę mnożenia: $7 \cdot \binom{6}{2} \cdot 1 = 7 \cdot 15 \cdot 1 = 105$.

Teraz stosujemy regułę dodawania: $42 + 105 = 147$.

Jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 p.

gdy zapisze że naturalna liczba siedmiocyfrowa, w której iloczyn wszystkich cyfr jest równy 28 może być zbudowana z dwóch zestawów cyfr: pięć jedynek, jedna czwórka i jedna siódemka lub cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka.

Zdający otrzymuje .... 2 p.

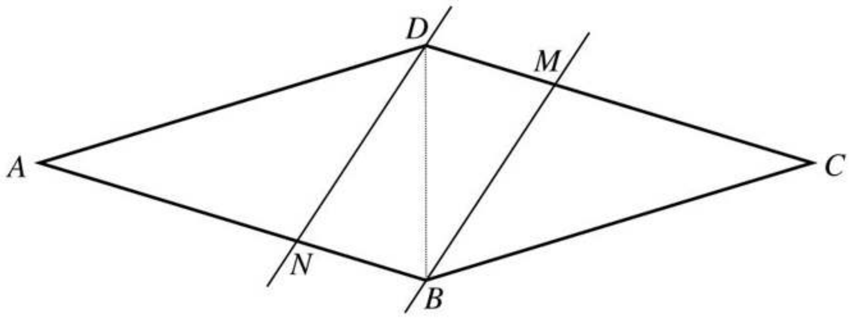
gdy obliczy ile jest liczb siedmiocyfrowych zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka lub zbudowanych z cyfr: cztery jedynki dwie dwójki i jedna siódemka: odpowiednio 42 i 105.

Zdający otrzymuje .... 3 p.

gdy obliczy, że jest 147 siedmiocyfrowych liczb naturalnych takich, że iloczyn wszystkich ich cyfr w zapisie dziesiętnym jest równy 28.

Zadanie 14. (0–6)

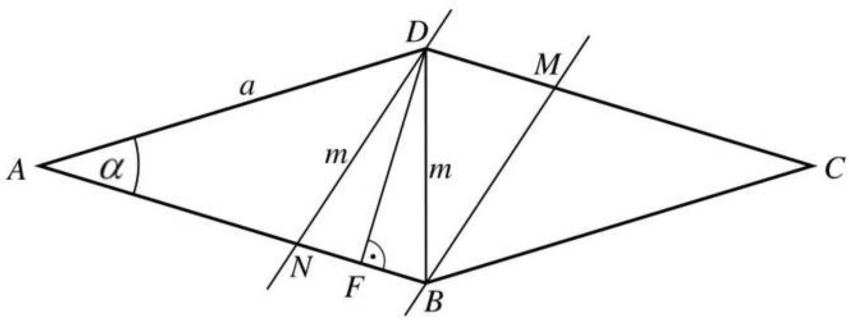
Dany jest romb $ABCD$. Przez wierzchołki B i D poprowadzono dwie proste równoległe przecinające boki CD i AB – odpowiednio – w punktach M i N, tak, że podzieliły one ten romb na trzy figury AND, $NBMD$, BCM o równych polach oraz $|MB| = |ND| = |BD|$ (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta ostrego tego rombu.



Przykładowe sposoby rozwiązania zadania

I sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta AND, więc pole trójkąta AND jest dwa razy większe od pola trójkąta BDN. Trójkąty AND i BDN mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka D, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|NB| = \frac{a}{3}$.

Trójkąt NBD jest równoramienny, więc spodek F jego wysokości DF jest środkiem podstawy NB. Stąd wynika, że $|FB| = \frac{a}{6}$, więc $|AF| = a - \frac{a}{6} = \frac{5}{6}a$.

Z trójkąta prostokątnego AFD otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{\frac{5}{6}a}{a} = \frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów AND i BDN jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej AB

albo

- zaznaczy wysokość DF trójkąta NBD i zapisze, że odcinki NF i FB są równe

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD} = a^2 \sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND} = \frac{1}{3}P_{ABCD}$, gdzie $x = |AN|$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu: $|AN| = \frac{2}{3}a$ ($|NB| = \frac{1}{3}a$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka FB w zależności od długości boku rombu lub wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym AFD: $|FB| = \frac{1}{6}a$ lub $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka FB w zależności od długości boku rombu i wykorzysta definicję cosinusa w trójkącie prostokątnym AFD: $|FB| = \frac{1}{6}a$ i $\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AD|}$.

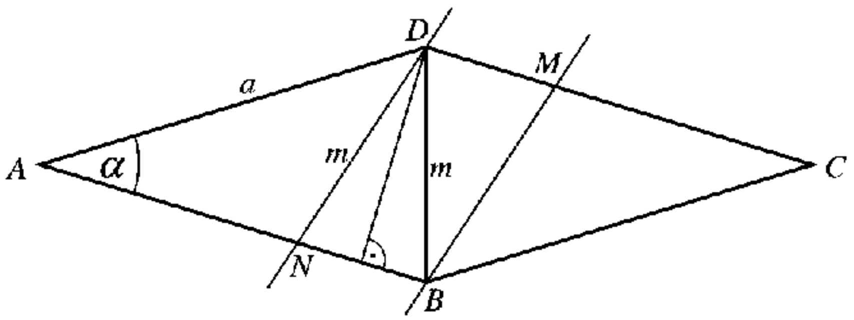
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

II sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach, a jednocześnie dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku jest równe polu trójkąta AND, więc pole trójkąta AND jest dwa razy większe od pola trójkąta BDN. Trójkąty AND i BDN mają tę samą wysokość opuszczoną z wierzchołka D, więc stosunek ich pól jest równy stosunkowi długości ich podstaw, czyli

$$|AN| = 2|NB|.$$

Zatem $|AN| = \frac{2}{3}a$.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD i AND otrzymujemy

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha \text{ oraz } |ND|^2 = |AN|^2 + |AD|^2 - 2|AN|\cdot|AD|\cos\alpha,$$

czyli

$$m^2 = a^2 + a^2 - 2a\cdot a\cos\alpha \text{ oraz } m^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + a^2 - 2\cdot\frac{2}{3}a\cdot a\cos\alpha,$$

$$m^2 = a^2\left(2 - 2\cos\alpha\right) \text{ oraz } m^2 = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha\right).$$

Stąd

$$a^2\left(2 - 2\cos\alpha\right) = a^2\left(\frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha\right),$$

$$2 - 2\cos\alpha = \frac{13}{9} - \frac{4}{3}\cos\alpha,$$

$$\frac{2}{3}\cos\alpha = \frac{5}{9},$$

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}.$$

Uwaga

Obliczenie, jaką częścią boku rombu jest odcinek AN, możemy też wykonać, korzystając ze wzoru na pole trójkąta $P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Niech $|AN|=x$. Wtedy pole rombu $ABCD$ jest równe

$$P_{ABCD}=a^2\sin\alpha,$$

a pole trójkąta AND jest równe

$$P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha.$$

Pole trójkąta AND to jedna trzecia pola rombu, więc

$$\frac{1}{2}ax\sin\alpha=\frac{1}{3}a^2\sin\alpha.$$

Stąd

$$x=\frac{2}{3}a.$$

Schemat punktowania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze, że stosunek pól trójkątów AND i BDN jest równy stosunkowi długości ich podstaw zawartych w prostej AB

albo

- zapisze dwa równania wynikające z twierdzenia cosinusów dla trójkątów ABD i AND: $m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha$, $m^2=x^2+a^2-2\cdot x\cdot a\cos\alpha$, gdzie $x=|AN|$

albo

- zapisze układ równań pozwalający wyznaczyć długość odcinka AN w zależności od długości boku rombu: $P_{ABCD}=a^2\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{2}ax\sin\alpha$ i $P_{AND}=\frac{1}{3}P_{ABCD}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający wyznaczy długość odcinka AN (lub NB) w zależności od długości boku rombu: $|AN|=\frac{2}{3}a$ ($|NB|=\frac{1}{3}a$).

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający zapisze jedno z równań, które pozwala obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:
$m^2=a^2(2-2\cos\alpha)$ lub $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający zapisze układ równań, pozwalający obliczyć cosinus kąta ostrego rombu:
$m^2=a^2(2-2\cos\alpha)$ oraz $m^2=a^2\left(\frac{13}{9}-\frac{4}{3}\cos\alpha\right)$.

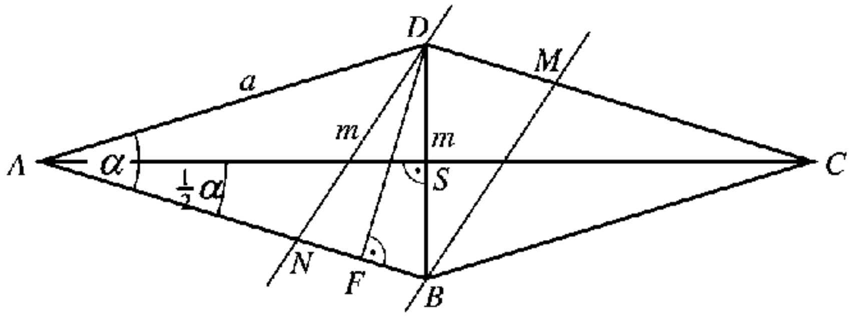
Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

III sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta NBD jest szóstą częścią pola rombu. Trójkąt NBD jest równoramienny, więc jego wysokość DF dzieli go na dwa trójkąty przystające. Zatem pole trójkąta FBD jest dwunastą częścią pola rombu.

Przekątne rombu dzielą go na cztery trójkąty przystające, więc pole trójkąta SBA jest czwartą częścią pola rombu.

Zauważmy teraz, że trójkąty FBD i SBA są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku B. Skala s tego podobieństwa jest równa

$$s = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2 = \frac{P_{FBD}}{P_{SBA}} = \frac{\frac{1}{12}P_{ABCD}}{\frac{1}{4}P_{ABCD}} = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$m^2 = \frac{1}{3}a^2.$$

Stąd $m = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Z trójkąta SBA otrzymujemy

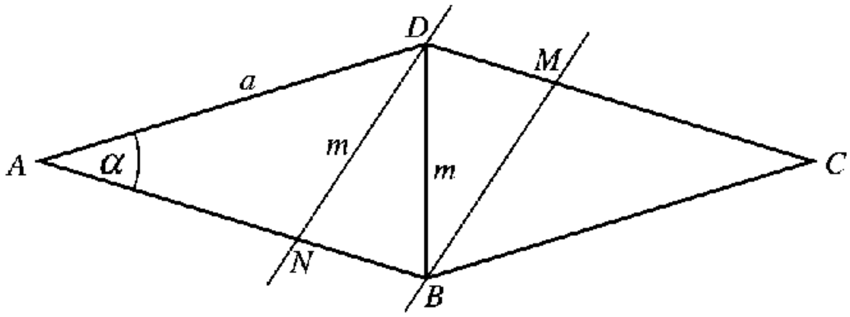
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}m}{a} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Ze wzoru na cosinus podwojonego kąta mamy więc

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 = 1 - \frac{2}{12} = \frac{5}{6}.$$

IV sposób

Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku.



Przekątna BD dzieli równoległobok $BMDN$ na dwa trójkąty o równych polach oraz romb $ABCD$ na dwa trójkąty o równych polach. Ponieważ pole tego równoległoboku to jedna trzecia pola rombu, więc pole trójkąta NBD jest trzecią częścią pola trójkąta BDA. Trójkąty NBD i BDA są równoramienne i mają ten sam kąt przy wierzchołku B , a jest to kąt przy podstawie każdego z tych trójkątów, więc trójkąty te są podobne. Skala s tego podobieństwa jest równa

$$s=\frac{|DB|}{|AB|}=\frac{m}{a}.$$

Kwadrat skali tego podobieństwa jest równy stosunkowi pól tych trójkątów, czyli

$$s^2=\frac{P_{NBD}}{P_{BDA}}=\frac{\frac{1}{3}P_{BDA}}{P_{BDA}}=\frac{1}{3}.$$

Zatem

$$\left(\frac{m}{a}\right)^2=\frac{1}{3},$$

$$m^2=\frac{1}{3}a^2.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BDA otrzymujemy

$$|BD|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB|\cdot|AD|\cos\alpha,$$

czyli

$$m^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cos\alpha,$$

$$\frac{1}{3}a^2=a^2\left(2-2\cos\alpha\right),$$

$$\frac{1}{3}=2-2\cos\alpha,$$

$$2\cos\alpha=\frac{5}{3},$$

$$\cos\alpha=\frac{5}{6}.$$

Schemat punktowania III i IV sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Zdający

- zapisze, że pole trójkąta *FBD* jest dwunastą częścią pola rombu *ABCD*

albo

- zapisze, że pole trójkąta *SBA* jest czwartą częścią pola rombu *ABCD*

albo

- zapisze, że pole trójkąta *NBD* jest trzecią częścią pola trójkąta *BDA*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zdający

- zapisze, że trójkąty *FBD* i *SBA* są podobne i $P_{FBD} = \frac{1}{12} P_{ABCD}$, i $P_{SBA} = \frac{1}{4} P_{ABCD}$

albo

- zapisze, że trójkąty *NBD* i *BDA* są podobne i $P_{NBD} = \frac{1}{3} P_{BDA}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi *m*, *a*, $\cos\alpha$, np.:
  $m^2 = \frac{1}{3} a^2$ i $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos\alpha$

lub

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....4 pkt

Zdający

- zapisze układ równań z niewiadomymi *m*, *a*, $\cos\alpha$, np.:
  $m^2 = \frac{1}{3} a^2$ i $m^2 = a^2 + a^2 - 2a \cdot a \cos\alpha$

oraz

- obliczy wartość dowolnej funkcji trygonometrycznej kąta $\frac{\alpha}{2}$, np.: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....5 pkt

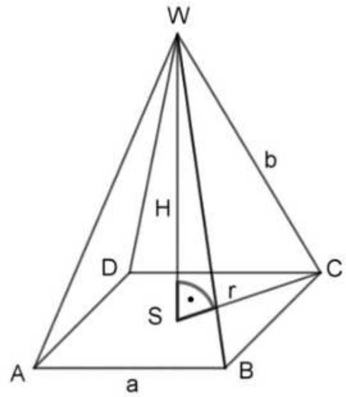
Rozwiązanie pełne ....6 pkt

Zdający obliczy $\cos\alpha$: $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie ostrosłupy prawidłowe czworokątne, w których suma promienia okręgu opisanego na podstawie i długości krawędzi bocznej jest równa d. Wyznacz długość krawędzi podstawy tego z rozpatrywanych ostrosłupów, który ma największą objętość. Oblicz tę objętość.

Rozwiązanie (I sposób)



Wprowadzamy oznaczenia: r – promień okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa, b – krawędź boczna, a – krawędź podstawy, H – wysokość ostrosłupa.

Z zależności $r+b=d$ wyznaczamy $b=d-r$. W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:
$H^2=b^2-r^2=(b-r)(b+r)=d(b-r)=d(d-r-r)=d(d-2r)$
skąd wyznaczamy $H=\sqrt{d(d-2r)}$.

Zauważamy, że $r>0$ oraz $d-2r>0$, czyli $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Wyznaczamy a w zależności od r: $a=r\sqrt{2}$ i zapisujemy objętość ostrosłupa w zależności od zmiennej r.

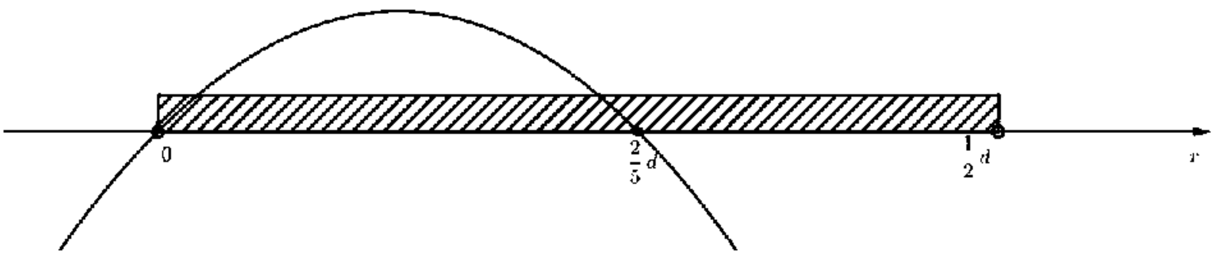
$V(r)=\frac{1}{3}r^2\cdot 2\sqrt{d^2-2dr}=\frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2-2r^5d}$ dla $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Rozważamy funkcję pomocniczą $f(r)=r^4d^2-2r^5d$, której dziedziną jest przedział $\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną
$f'(r)=4r^3d^2-10r^4d=2r^3d(2d-5r)$

Jedynym miejscem zerowym z przedziału $\left(0,\frac{d}{2}\right)$ jest $r=\frac{2}{5}d$
($r=0$ nie należy do dziedziny funkcji f).

Analizujemy monotoniczność funkcji f (np. na podstawie wykresu znaku pochodnej):



$f'(r)>0$ dla $r\in\left(0,\frac{2}{5}d\right)$ (funkcja w tym przedziale rośnie),

$f'(r)<0$ dla $r\in\left(\frac{2}{5}d,\frac{1}{2}d\right)$ (funkcja w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja osiąga maksimum lokalne dla $r=\frac{2}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w dziedzinie.

Ponieważ funkcja $g(x)=\sqrt{x}$ jest funkcją rosnącą, funkcja V oraz funkcja f są rosnące i malejące w tych samych przedziałach i przyjmują maksimum lokalne dla tego samego argumentu.

Wobec tego, ostrosłup ma największą objętość dla $r=\frac{2}{5}d$, czyli dla $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wysokość tego ostrosłupa jest równa $H=\sqrt{d\left(d-\frac{4}{5}d\right)}=\frac{\sqrt{5}}{5}d$. Szukana objętość jest równa

$V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Odp. Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$, objętość ta jest równa $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa oraz wysokości w zależności od długości promienia okręgu opisanego na podstawie

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej r: $V(r)=\frac{2}{3}\sqrt{r^4d^2-2r^5d}$,

c) określenie dziedziny funkcji V: $r\in\left(0,\frac{d}{2}\right)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po **1 punkcie.**

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wprowadzenie funkcji pomocniczej $f(r) = r^4 d^2 - 2r^5 d$ i wyznaczenie pochodnej
$f'(r) = 4r^3 d^2 - 10r^4 d = 2r^3 d(2d - 5r)$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $r = \frac{2}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $r = \frac{2}{5}d$ funkcja f osiąga największą wartość oraz że dla takiej wartości promienia objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

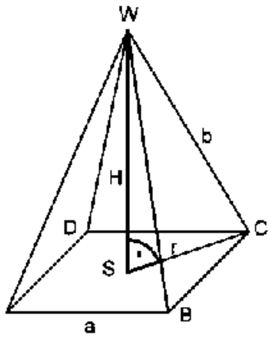
Uwaga
Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- **Trzeci etap.**

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:
$a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 **punkt**.

Rozwiązanie (II sposób)



Wprowadzamy oznaczenia, jak w I sposobie.
Z zależności $r + b = d$ wyznaczamy $b = d - r$. W trójkącie SCW stosujemy tw. Pitagorasa:

$$H^2 = d(d - 2r) / : d \quad (d \neq 0)$$

$$\frac{H^2}{d} = d - 2r$$

$$r = \frac{1}{2}\left(d - \frac{H^2}{d}\right) = \frac{1}{2d}\left(d^2 - H^2\right)$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa $P_P = \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$ oraz objętość

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 H = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4d^2}\left(d^2 - H^2\right)^2 \cdot H$$

$$V(H) = \frac{1}{6d^2}\left(d^4 H - 2d^2 H^3 + H^5\right)$$

Z warunków geometrycznych $H > 0$ i $H < r + b$ (nierówność trójkąta w trójkącie SWC) wyznaczamy dziedzinę funkcji V:

$H \in (0, d)$

Aby znaleźć maksimum lokalne tej funkcji, wyznaczamy jej pochodną

$V'(H) = \frac{1}{6d^2}\left(5H^4 - 6d^2H^2 + d^4\right)$

Obliczamy miejsca zerowe i analizujemy znak pochodnej

$V'(H) = 0 \Leftrightarrow 5H^4 - 6d^2H^2 + d^4 = 0$

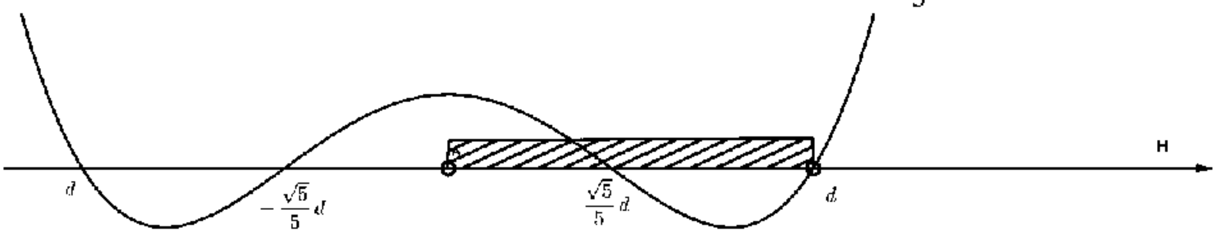
$H^2 = t$

$5t^2 - 6d^2t + d^4 = 0$

$t = \frac{1}{5}d^2 \qquad t = d^2$

$H = -\frac{\sqrt{5}}{5}d, \; H = \frac{\sqrt{5}}{5}d, \; H = -d, \; H = d$

Jedynym miejscem zerowym pochodnej w przedziale $(0, d)$ jest $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$.



$V'(H) > 0$ dla $H \in \left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}d\right)$ (funkcja V w tym przedziale rośnie),

$V'(H) < 0$ dla $H \in \left(\frac{\sqrt{5}}{5}d, d\right)$ (funkcja V w tym przedziale maleje).

Wnioskujemy, że funkcja V osiąga maksimum lokalne dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$. Z analizy monotoniczności funkcji V w dziedzinie wynika, że jest to jednocześnie największa wartość funkcji w przedziale $(0, d)$.

Ostrosłup ma największą objętość dla $H = \frac{\sqrt{5}}{5}d$, czyli dla $a = \frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Największa objętość jest równa $V = \frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Schemat oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie długości promienia okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa oraz pola podstawy w zależności od długości wysokości ostrosłupa

b) zapisanie objętości ostrosłupa jako funkcji zmiennej H:

$$V(H)=\frac{1}{6d^2}\left(d^4H-2d^2H^3+H^5\right)$$

c) określenie dziedziny funkcji V: $H\in(0,d)$.

Za każdą z części tego etapu zdający otrzymuje po 1 **punkcie.**

Drugi etap składa się z trzech części:

a) wyznaczenie pochodnej

$$V'(H)=\frac{1}{6d^2}\left(5H^4-6d^2H^2+d^4\right),$$

b) obliczenie miejsca zerowego pochodnej $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$,

c) uzasadnienie, że dla $H=\frac{\sqrt{5}}{5}d$ objętość ostrosłupa jest największa.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwaga

Jeżeli zdający nie wyznaczy dziedziny funkcji V, to nie może otrzymać punktu za ostatnią część etapu drugiego (uzasadnienie).

- Trzeci etap.

Obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa o największej objętości:

$a=\frac{2\sqrt{2}}{5}d$. Wyznaczenie największej objętości ostrosłupa: $V=\frac{8\sqrt{5}}{375}d^3$.

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje 1 **punkt**.