CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

WYPEŁNIA ZDAJĄCY	
KOD	PESEL

Miejsce na naklejkę.
Sprawdź, czy kod na naklejce to **E-100**.
Jeżeli tak – przyklej naklejkę.
Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY

DATA: **2 czerwca 2022 r.**
GODZINA ROZPOCZĘCIA: **14:00**
CZAS PRACY: **180 minut**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

WYPEŁNIA ZESPÓŁ NADZORUJĄCY

Uprawnienia zdającego do:
- ☐ nieprzenoszenia zaznaczeń na kartę
- ☐ dostosowania zasad oceniania
- ☐ dostosowania w zw. z dyskalkulią.

EMAP-R0-**100**-2206

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 26 stron (zadania 1–15). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
4. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
5. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
6. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
7. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
8. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
9. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora prostego.

W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Wiadomo, że $\log_5 2 = a$ i $\log_5 3 = b$. Wtedy liczba $\log_{18} 40$ jest równa

A. $\frac{3a+1}{a+b}$ **B.** $\frac{2a+1}{a+b}$ **C.** $\frac{2a+1}{a+2b}$ **D.** $\frac{3a+1}{2b+a}$

Zadanie 2. (0–1)

Granica $\lim\limits_{x \to -3} \frac{0{,}5x^2+3{,}5x+6}{-x^2+2x+15}$ jest równa

A. $\left(-\frac{1}{8}\right)$ **B.** $\frac{1}{16}$ **C.** $\left(-\frac{1}{16}\right)$ **D.** $\frac{7}{4}$

Zadanie 3. (0–1)

Sumą wektorów $\vec{a} = \left[2 + 2m, \frac{2}{3}n + 1\right]$ oraz $\vec{b} = [n + 1, m + 2]$ jest wektor $\vec{c} = [0, 0]$.
Wynika stąd, że

A. $m = 1$ i $n = 3$.
B. $m = -9$ i $n = -21$.
C. $m = 3$ i $n = -9$.
D. $m = -1$ i $n = 0$.

Zadanie 4. (0–1)

Pole trójkąta ostrokątnego o bokach 5 i 8 jest równe 12. Długość trzeciego boku tego trójkąta jest równa

A. 5 **B.** 8 **C.** $\sqrt{41}$ **D.** $\sqrt{143}$

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 5. (0–2)

Wśród 390 pracowników pewnej firmy jest 150 kobiet i 240 mężczyzn. Wśród nich w wieku przedemerytalnym jest 21 kobiet i 43 mężczyzn. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrany pracownik tej firmy jest w wieku przedemerytalnym – pod warunkiem że jest mężczyzną.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $x \neq y$, spełniona jest nierówność

$$x^4 + y^4 > xy(x^2 + y^2)$$

Zadanie 7. (0–3)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych, w których zapisie występują dokładnie dwie cyfry nieparzyste.

Zadanie 8. (0–3)

Rozwiąż nierówność

$$\frac{3x+1}{2x+1} \leq \frac{3x+4}{2x+3}$$

Zadanie 9. (0–3)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przez punkt O przecięcia się przekątnych poprowadzono dwie proste równoległe do boków BC i AD. Prosta równoległa do boku BC przecina bok AB w punkcie B', a prosta równoległa do boku AD przecina bok AB w punkcie A'. Wykaż, że $|AA'| = |BB'|$.

Zadanie 10. (0–4)

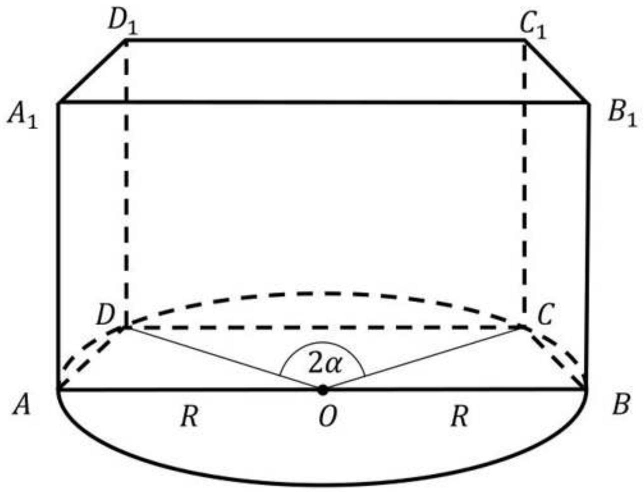
Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, którego iloraz q jest równy pierwszemu wyrazowi i spełnia warunek $|q| < 1$.
Stosunek sumy S_N wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach nieparzystych do sumy S_P wszystkich wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równy różnicy tych sum,
tj. $\frac{S_N}{S_P} = S_N - S_P$. Oblicz q.

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos(3x) + \sqrt{3}\sin(3x) + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Zadanie 12. (0–5)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest trapez równoramienny $ABCD$ wpisany w okrąg o środku O i promieniu R. Dłuższa podstawa AB trapezu jest średnicą tego okręgu, a krótsza – cięciwą odpowiadającą kątowi środkowemu o mierze 2α (zobacz rysunek). Przekątna ściany bocznej zawierającej ramię trapezu jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa jako funkcję promienia R i miary kąta α.



Zadanie 13. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$(x-4)[x^2+(m-3)x+m^2-m-6]=0$$

ma trzy różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 oraz x_3, spełniające warunek

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 5m - 51$$

Zadanie 14. (0–6)

Dane są okrąg o_1 o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=98$ oraz okrąg o_2 o promieniu $2\sqrt{5}$. Środki okręgów o_1 i o_2 leżą po różnych stronach prostej k o równaniu $y=-3x-6$, a punkty wspólne obu okręgów leżą na prostej k. Wyznacz równanie okręgu o_2.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne ostrokątne ABC ($|AC| = |BC|$), na których opisano okrąg o promieniu $R = 1$. Niech x oznacza odległość środka okręgu od podstawy AB trójkąta.

a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości x, wyraża się wzorem $P(x) = (x + 1) \cdot \sqrt{1 - x^2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P.

c) Oblicz długość odcinka x tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole. Oblicz to największe pole.

BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)