CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

Rodzaj dokumentu:	**Zasady oceniania rozwiązań zadań**
Egzamin:	**Egzamin maturalny**
Przedmiot:	**Matematyka**
Poziom:	**Poziom rozszerzony**
Formy arkusza:	MMAP-R0-100, MMAP-R0-200, MMAP-R0-300, MMAP-R0-400, MMAP-R0-600, MMAP-R0-700, MMAP-R0-K00, MMAP-R0-Q00, MMAU-R0-100
Termin egzaminu:	11 czerwca 2024 r.

Uwagi ogólne:

1. Akceptowane są wszystkie rozwiązania merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błędy rachunkowe, które na żadnym etapie rozwiązania nie upraszczają i nie zmieniają danego zagadnienia, lecz stosuje poprawną metodę i konsekwentnie do popełnionych błędów rachunkowych rozwiązuje zadanie, to może otrzymać co najwyżej $(n-1)$ punktów (gdzie n jest maksymalną możliwą do uzyskania liczbą punktów za dane zadanie).

Zadanie 1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024[1]	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. 1. Interpretowanie i operowanie informacjami przedstawionymi w tekście, zarówno matematycznym, jak i popularnonaukowym, a także w formie wykresów, diagramów, tabel.	Zdający: V.13) posługuje się funkcjami wykładniczą i logarytmiczną, w tym ich wykresami, do opisu i interpretacji zagadnień związanych z zastosowaniami praktycznymi.

Zasady oceniania

2 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: 120 sekund.

1 pkt – wyznaczenie współczynnika b: $b = \frac{1}{9}m_0$

ALBO

– zapisanie związku $a + b = m_0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Ponieważ po osiągnięciu stanu równowagi masa związku A była równa $\frac{1}{9}m_0$, więc

$$\frac{1}{9}m_0 = \lim_{t\to+\infty} m(t) = \lim_{t\to+\infty} a\cdot 2^{-0{,}05\cdot t} + b = 0 + b = b$$

Stąd i z warunku $m(0) = m_0$ otrzymujemy

$$m_0 = a\cdot 2^{-0{,}05\cdot 0} + \frac{1}{9}m_0$$

czyli $a = \frac{8}{9}m_0$.

Obliczamy czas, po którym pozostało $12{,}5\%$ początkowej masy związku A:

[1]Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 10 czerwca 2022 r. w sprawie wymagań egzaminacyjnych dla egzaminu maturalnego przeprowadzanego w roku szkolnym 2022/2023 i 2023/2024 (Dz.U. poz. 1246).

$$\frac{1}{8}m_0 = \frac{8}{9}m_0 \cdot 2^{-0,05\cdot t} + \frac{1}{9}m_0 \quad /: m_0$$

$$\frac{1}{72} = \frac{8}{9} \cdot 2^{-0,05\cdot t}$$

$$2^{-6} = 2^{-0,05\cdot t}$$

$$6 = 0,05t$$

$$t = 120$$

Zatem po 120 sekundach przereaguje $87,5\%$ masy początkowej związku A.

Zadanie 2. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R1) oblicza granice funkcji (w tym jednostronne).

Zasady oceniania

2 pkt – poprawna metoda obliczenia granicy oraz poprawny wynik: $\left(-\frac{1}{6}\right)$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia $\frac{|x-3|}{x^2-9}$ w postaci $\frac{-1}{x+3}$, gdzie $x \in (-3,3)$

ALBO

– zapisanie wyrażenia $\left|\frac{|x-3|}{x^2-9}+\frac{1}{6}\right|$ w postaci $\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$, gdzie $x \in (-3,3)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przekształcamy wyrażenie $\frac{|x-3|}{x^2-9}$, korzystając ze wzoru na różnicę kwadratów i definicji wartości bezwzględnej:

$$\frac{|x-3|}{x^2-9}=\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{-1}{x+3}$$

dla każdego $x \in (-3,3)$.

Ponieważ $\lim\limits_{x\to 3^-}(x+3)=6$ oraz $\lim\limits_{x\to 3^-}(-1)=-1$, więc

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x^2-9}=-\frac{1}{6}$$

Sposób II

Niech ϵ będzie dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy $\delta=\frac{6\epsilon}{1+\epsilon}$. Wtedy $\delta>0$ i $\delta<6$.

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą spełniającą warunek $-\delta<x-3<0$.

Wówczas

$$\left|\frac{|x-3|}{x^2-9}+\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{-1}{x+3}+\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{x-3}{x+3}\right|<\frac{1}{6}\cdot\frac{\delta}{|x+3|}<$$

$$<\frac{1}{6}\cdot\frac{\delta}{6-\delta}=\frac{1}{6}\cdot\frac{\frac{6\epsilon}{1+\epsilon}}{6-\frac{6\epsilon}{1+\epsilon}}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\epsilon}{6}<\epsilon$$

Zatem dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla każdego x spełniającego warunek $-\delta < x - 3 < 0$ zachodzi

$$\left|\frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{1}{6}\right| < \epsilon$$

To oznacza, że

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{|x-3|}{x^2-9} = -\frac{1}{6}$$

Zadanie 3. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: XIII.R2) stosuje definicję pochodnej funkcji, podaje interpretację geometryczną pochodnej; XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu.

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $x_0 = 7$ oraz $y = -x + 12$ (lub $y = -(x-7) + 5$).

2 pkt – obliczenie odciętej punktu P i wyznaczenie pochodnej funkcji f: $x_0 = 7$ oraz $f'(x) = \frac{2\cdot(x-4)-(2x+1)\cdot 1}{(x-4)^2}$.

1 pkt – obliczenie odciętej punktu P: $x_0 = 7$

ALBO

– wyznaczenie pochodnej funkcji f: $f'(x) = \frac{2\cdot(x-4)-(2x+1)\cdot 1}{(x-4)^2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający błędnie stosuje wzór na pochodną ilorazu funkcji, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Obliczamy odciętą x_0 punktu P:

$$5 = \frac{2x_0 + 1}{x_0 - 4}$$

$$5x_0 - 20 = 2x_0 + 1$$

$$x_0 = 7$$

Wyznaczamy pochodną funkcji f:

$$f'(x) = \frac{2(x-4) - (2x+1)\cdot 1}{(x-4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-9}{(x-4)^2}$$

Wyznaczamy równanie kierunkowe $y = ax + b$ stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P. Obliczamy współczynnik kierunkowy a w równaniu stycznej:

$$a = f'(7) = -1$$

Obliczamy współczynnik b w równaniu stycznej:

$$5 = -1 \cdot 7 + b$$

$$b = 12$$

Styczna ma równanie $y = -x + 12$.

Zadanie 4. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: XII.R1) oblicza prawdopodobieństwo warunkowe […].

Zasady oceniania

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{1}{15}$.

2 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$ i wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B: $|A \cap B| = 8$ i $|B| = \binom{10}{3}$

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzeń $A \cap B$ oraz B:

$P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$ oraz $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$.

1 pkt – zapisanie liczby elementów zbioru $A \cap B$: 8

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie liczby elementów zbioru B, np. $\binom{10}{3}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia B, np. $P(B) = \frac{\binom{10}{3}}{2^{10}}$,

ALBO

– wyznaczenie/zapisanie prawdopodobieństwa zdarzenia $A \cap B$, np. $P(A \cap B) = \frac{8}{2^{10}}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów z rzędu w dziesięciu rzutach monetą,

B – zdarzenie polegające na wyrzuceniu trzech orłów w dziesięciu rzutach monetą,

Ω – zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.

Wynikiem każdego rzutu jest orzeł (o) lub reszka (r). Wynikiem doświadczenia losowego jest dziesięciowyrazowy ciąg o wyrazach ze zbioru $\{o, r\}$. Zatem liczba elementów zbioru Ω jest równa $2^{10} = 1024$.

Obliczamy liczbę elementów zbioru B: $|B| = \binom{10}{3} = 120$.

Zdarzenie $A \cap B$ polega na wyrzuceniu w dziesięciu rzutach dokładnie trzech orłów i to trzech orłów z rzędu. Obliczamy liczbę elementów zbioru $A \cap B$: $|A \cap B| = 8$.

Obliczamy prawdopodobieństwo $P(A|B)$:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{\frac{8}{1024}}{\frac{120}{1024}} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

Uwagi:

1. Zdający może rozwiązać zadanie poprzez obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń B oraz $A \cap B$.

2. Zdający może obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystając ze schematu Bernoullego. Sukcesem w pojedynczej próbie jest wyrzucenie orła. Prawdopodobieństwo p sukcesu jest równe $p = \frac{1}{2}$. Przy liczbie prób $n = 10$ oraz liczbie sukcesów $k = 3$ otrzymujemy

$$P(B) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^7 = \frac{120}{2^{10}}$$

Zadanie 5. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: III.R2) rozwiązuje równania i nierówności wymierne […].

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wykorzystanie założenia i przekształcenie nierówności $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ do postaci $4a^2-4a+1\geq 0,\ 4b^2-4b+1\geq 0$ albo $a^2-2ab+b^2\geq 0$

ALBO

– zapisanie nierówności między odpowiednimi średnimi liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$) i przekształcenie tej nierówności do postaci, z której można bezpośrednio wnioskować o prawdziwości tezy, np. $\frac{3}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}$.

1 pkt – zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej $\frac{P(a,b)}{Q(a,b)}\geq 0$, np. $\frac{3(a+2b)+3(2a+b)-4(a+2b)(2a+b)}{3(2a+b)(a+2b)}\geq 0$

ALBO

– zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wielomianowej, np. $3(1+b)+3(a+1)\geq 4(a+1)(1+b)$,

ALBO

– zapisanie nierówności między średnią harmoniczną a arytmetyczną liczb $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ (lub między odpowiednimi średnimi liczb $2a+b$ oraz $a+2b$), np.

$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{a+2b}}}$, $\frac{2a+b+a+2b}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}$,

ALBO

– wykorzystanie założenia i zapisanie nierówności w postaci równoważnej jako nierówności wymiernej z jedną niewiadomą, np. $\frac{1}{2a+(1-a)}+\frac{1}{a+2(1-a)}\geq\frac{4}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Ponieważ $a>0$ i $b>0$, więc $(2a+b)(a+2b)>0$.

Przekształcamy równoważnie nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}\geq\frac{4}{3}$ i otrzymujemy:

$$\frac{1}{2a + b} + \frac{1}{a + 2b} \geq \frac{4}{3}$$

$$\frac{3(a+2b)}{3(2a + b)(a+2b)} + \frac{3(2a+b)}{3(a + 2b)(2a+b)} - \frac{4(a+2b)(2a+b)}{3(a+2b)(2a+b)} \geq 0$$

$$\frac{3a+6b+6a+3b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a + b)(a+2b)} \geq 0$$

$$\frac{9a+9b-8a^2-20ab-8b^2}{3(2a + b)(a+2b)} \geq 0$$

$$9a+9b-8a^2-20ab-8b^2 \geq 0$$

Korzystamy z założenia i otrzymujemy dalej

$$9a+9(1-a)-8a^2-20a(1-a)-8(1-a)^2 \geq 0$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób II

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(1+b)$ i ponownie korzystamy z założenia, otrzymując kolejno:

$$3(1+b)+3(a+1) \geq 4(a+1)(1+b)$$

$$2-(a+b) \geq 4ab$$

$$1 \geq 4ab$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(a-b)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b} + \frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Sposób III

Korzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a harmoniczną dla liczb dodatnich $\frac{1}{2a+b}$ oraz $\frac{1}{a+2b}$ i otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{2a+b}}+\frac{1}{\frac{1}{a+2b}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{2a+b+a+2b}$$

$$\frac{\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b}}{2} \geq \frac{2}{3(a+b)}$$

$$\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3(a+b)}$$

Po skorzystaniu z założenia $a+b=1$ otrzymujemy tezę.

Sposób IV

Korzystamy z założenia $a+b=1$ i nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ zapisujemy w postaci

$$\frac{1}{2a+1-a}+\frac{1}{a+2(1-a)} \geq \frac{4}{3}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez liczbę dodatnią $3(a+1)(2-a)$ i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{2-a} \geq \frac{4}{3}$$

$$3(2-a)+3(a+1) \geq 4(a+1)(2-a)$$

$$6-3a+3a+3 \geq -4a^2+4a+8$$

$$4a^2-4a+1 \geq 0$$

$$(2a-1)^2 \geq 0$$

Ponieważ kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną, więc nierówność $(2a-1)^2 \geq 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej a, więc w szczególności dla każdego $a \in (0,1)$. To oznacza, że nierówność $\frac{1}{2a+b}+\frac{1}{a+2b} \geq \frac{4}{3}$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej a i dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej b takich, że $a+b=1$.

Zadanie 6. (0–3)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: VIII.R1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.

Zasady oceniania

3 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

2 pkt – wyznaczenie pola trapezu w zależności od długości jego podstaw: $P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie równania z a, b oraz h, z którego można wyznaczyć długość wysokości trapezu w zależności od długości jego podstaw, np. $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$

ALBO

– wyznaczenie długości promienia okręgu w zależności od długości podstaw trapezu, np. $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}}$,

ALBO

– zapisanie, że pole czworokąta wpisanego w okrąg i opisanego na okręgu jest równe pierwiastkowi z iloczynu długości boków tego czworokąta,

ALBO

– zapisanie, że wysokość trapezu równoramiennego jest średnią geometryczną długości podstaw trapezu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

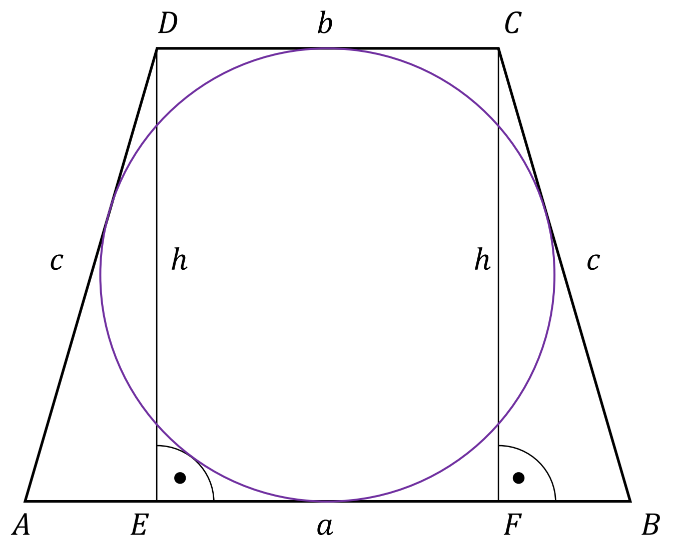
Uwaga:

W przypadku, gdy zdający zapisze nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$ w postaci równoważnej $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ i stwierdzi, że jej prawdziwość wynika z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną różnych liczb dodatnich a i b, to rozumowanie uznajemy za pełne.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Trapez jest równoramienny, więc $|AE| = |BF| = \frac{a-b}{2}$. Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCF otrzymujemy

$$|BF|^2 + |FC|^2 = |CB|^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = c^2$$

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad /\cdot 4$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4h^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h = \sqrt{ab}$$

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

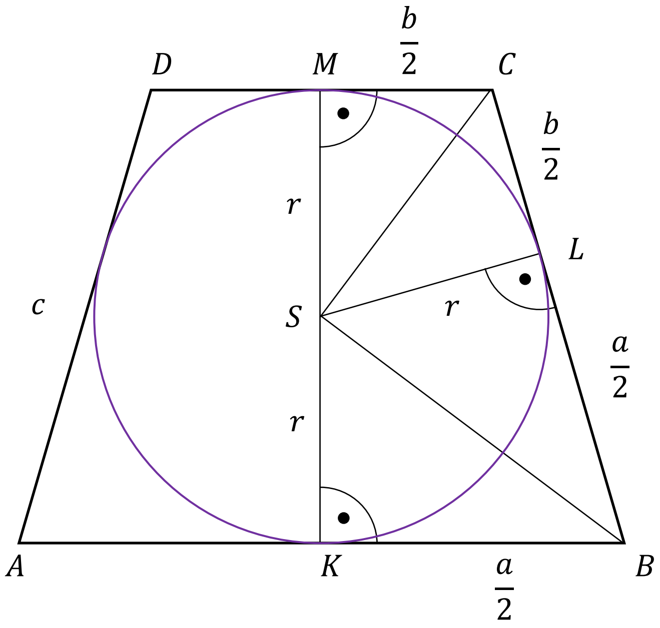
Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Sposób II

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku (K, L, M są punktami styczności okręgu z trapezem).



Z twierdzenia o odcinkach stycznych wynika, że $|BL| = \frac{a}{2}$ oraz $|CL| = \frac{b}{2}$.

Ponieważ środek okręgu wpisanego w trapez $ABCD$ jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trapezu, więc

$$|\sphericalangle KBS| = |\sphericalangle CBS| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle BCS|$$

Suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy ramieniu BC jest równa $180°$, więc

$$|\sphericalangle KBS| + |\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle MCS| + |\sphericalangle BCS| = 180°$$

Zatem

$$|\sphericalangle CBS| + |\sphericalangle BCS| = 90°$$

To oznacza, że trójkąt BCS jest prostokątny.

Wysokość tego trójkąta opuszczona na przeciwprostokątną jest promieniem okręgu wpisanego w trapez $ABCD$, więc z twierdzenia o wysokości trójkąta prostokątnego wynika, że $r = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

Pole P trapezu jest równe $P = \frac{a+b}{2} \cdot 2r = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$.

Pozostaje wykazać, że prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab$.

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\sqrt{ab}$, otrzymujemy

$$\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > ab \quad /:\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b > 0$$

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

Z założenia $a > b > 0$, więc $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 0$. Zatem $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$ jako kwadrat liczby dodatniej $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. To oznacza, że $P > ab$.

Sposób III

Z własności czworokąta opisanego na okręgu i w który można także wpisać okrąg wynika, że pole takiego czworokąta jest równe $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$, gdzie a, b, c, d są długościami boków czworokąta.

Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu, ale jest on równoramienny, więc można na nim także opisać okrąg. Zatem pole P tego trapezu jest równe $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot c$, gdzie c jest długością ramienia trapezu.

Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc $a + b = c + c$, czyli $c = \frac{a+b}{2}$.

Stąd $P = \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2}$.

Ponieważ $a > b$, więc z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną liczb dodatnich a oraz b otrzymujemy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. Stąd

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab} > \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$$

czyli $P > ab$, co należało wykazać.

Zadanie 7. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych.	Zdający: VI.R2) rozpoznaje zbieżne szeregi geometryczne i oblicza ich sumę.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_n = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

3 pkt – odrzucenie wartości $q = 2$ **oraz** poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania z jedną niewiadomą a_1 : $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równania z jedną niewiadomą q oraz obliczenie pierwiastków tego równania, np.

$16(1-q^2) + 16(1-q^2)\cdot q^2 = \frac{5}{2}\cdot 16(1-q^2)\cdot q$

i $q = 1$ oraz $q = -1$, oraz $q = \frac{1}{2}$, oraz $q = 2$,

oraz odrzucenie tych wartości q, dla których nie jest spełniony warunek zbieżności $|q^2| < 1$ (dla sposobu II).

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą q **oraz** obliczenie pierwiastków tego równania, np. $2q^2 - 5q + 2 = 0$ i $q = \frac{1}{2}$ oraz $q = 2$ (dla sposobu I)

ALBO

– zapisanie równań $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2}a_1 \cdot q$ oraz $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ (dla sposobu II).

1 pkt – zapisanie równania $a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2}a_1 \cdot q$ (dla sposobu I)

ALBO

– poprawne zastosowanie wzoru na sumę szeregu geometrycznego i zapisanie równania $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$ (dla sposobu II).

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze sumę wszystkich wyrazów ciągu o wyrazach nieparzystych jako $\frac{a_1}{1-q}$ i rozwiąże zadanie konsekwentnie do końca, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający myli ciąg geometryczny z arytmetycznym, to otrzymuje **0 punktów** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n). Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

$$a_1 \cdot \left(1 + q^2 - \frac{5}{2}q\right) = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \quad \vee \quad q = 2 \quad \vee \quad q = \frac{1}{2}$$

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2. Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Pozostaje zatem rozpatrzeć przypadki $q = 2$ oraz $q = \frac{1}{2}$.

Gdy $q = 2$, to warunek $|q^2| < 1$ nie jest spełniony.

Gdy $q = \frac{1}{2}$, to warunek $|q^2| < 1$ jest spełniony. Wtedy $\frac{a_1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 16$ i stąd $a_1 = 12$.

Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Sposób II

Niech q oznacza iloraz ciągu geometrycznego (a_n).

Rozważmy nieskończony ciąg wyrazów o numerach nieparzystych, tj. $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Jest to ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym a_1 oraz ilorazie q^2. Ponieważ suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) o numerach nieparzystych istnieje i jest równa 16, więc $a_1 \neq 0$ oraz $|q^2| < 1$ i $\frac{a_1}{1-q^2} = 16$. Zatem $a_1 = 16(1 - q^2)$.

Z warunku $a_1 + a_3 = \frac{5}{2}a_2$ oraz z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot q$$

Stąd oraz z równości $a_1 = 16(1 - q^2)$ otrzymujemy kolejno:

$$16(1-q^2)+16(1-q^2)\cdot q^2=\frac{5}{2}\cdot 16(1-q^2)\cdot q$$

$$16-16q^2+16q^2-16q^4=40q-40q^3$$

$$-16q^4+40q^3-40q+16=0$$

$$-16(q^4-1)+40q(q^2-1)=0$$

$$-16(q^2-1)(q^2+1)+40q(q^2-1)=0$$

$$(q^2-1)[-16(q^2+1)+40q]=0$$

$$(q^2-1)(-16q^2+40q-16)=0$$

$$q^2-1=0 \quad \lor \quad -16q^2+40q-16=0$$

$$q=1 \quad \lor \quad q=-1 \quad \lor \quad q=2 \quad \lor \quad q=\frac{1}{2}$$

Uwzględniając warunek $|q^2|<1$, otrzymujemy $q=\frac{1}{2}$. Zatem $a_1=12$. Nieskończony ciąg geometryczny o pierwszym wyrazie równym 12 i ilorazie $\frac{1}{2}$ spełnia warunki zadania. Wzór ogólny na n–ty wyraz ciągu (a_n) ma postać $a_n=12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Zadanie 8. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R8) oblicza kąty trójkąta i długości jego boków przy odpowiednich danych (m.in. z wykorzystaniem twierdzenia sinusów).

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\sqrt{21}-3$ (lub $\sqrt{30-6\sqrt{21}}$).

3 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (długością boku AC), np.

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2=|AC|^2+6^2-2\cdot 6\cdot |AC|\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),$$

$$|AC|^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2+6^2-2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{7}+3\sqrt{3}}{8},$$

$$6^2=|AC|^2+\left(4\sqrt{3}\right)^2-2\cdot|AC|\cdot 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}$$

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej i zapisanie równania z tą jedną niewiadomą, które prowadzi do jej obliczenia, np. $|AE|=3x$ oraz $|AC|=4x$, oraz $|EC|=\sqrt{7}x$, oraz $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{7}x\right)^2+(3x)^2=6^2$ (dla sposobu II),

ALBO

– obliczenie sinusa kąta ABC: $\frac{-3+\sqrt{21}}{8}$ (dla sposobu III).

2 pkt – obliczenie miary kąta BAC: 120°

ALBO

– zapisanie długości boków trójkąta ACE za pomocą jednej niewiadomej, np. $|AE|=3x$ oraz $|AC|=4x$, oraz $|EC|=\sqrt{7}x$,

ALBO

– obliczenie cosinusa kąta ACB: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

1 pkt – zapisanie równania, w którym jedyną niewiadomą jest miara kąta BAC (lub miara kąta ACB), np. $\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|}=8$, $\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|}=8$, $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\sin|\sphericalangle BAC|=\frac{6\cdot 4\sqrt{3}}{4\cdot 4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający uzyska $|\sphericalangle BAC|=60^\circ$ oraz $|\sphericalangle BAC|=120^\circ$ i konsekwentnie obliczy długość boku AC dla obu tych wartości kątów, ale w rozwiązaniu nie odrzuci wartości $|AC|=3+\sqrt{21}$, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|} = 8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC| = 60°$ lub $|\sphericalangle BAC| = 120°$.
Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa $R\sqrt{3} = 4\sqrt{3} = |BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB| = 6$, więc $A \neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD, to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD, to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC| = 120°$.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie cosinusów i obliczamy długość boku AC:

$$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \cos|\sphericalangle BAC|$$

$$\left(4\sqrt{3}\right)^2 = |AC|^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot |AC| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$|AC|^2 + 6 \cdot |AC| - 12 = 0$$

$$|AC| = -3 + \sqrt{21} \quad \vee \quad |AC| = -3 - \sqrt{21} < 0$$

Zatem $|AC| = -3 + \sqrt{21}$.

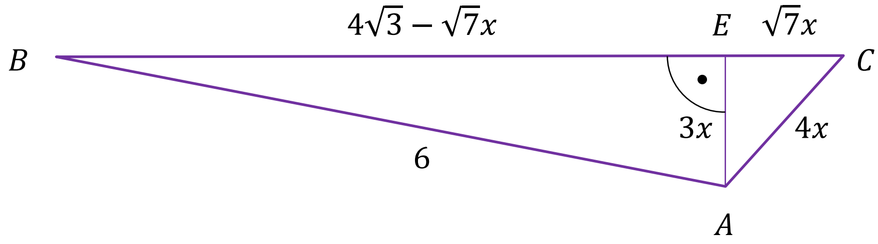
Sposób II

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|} = 8$$

Stąd $\sin|\sphericalangle ACB| = \frac{3}{4}$.
Niech E będzie spodkiem wysokości poprowadzonej w trójkącie ABC z wierzchołka A na bok BC.
Oznaczmy $|AE| = 3x$. Wtedy $|AC| = 4x$, $|EC| = \sqrt{7}x$, $|BE| = 4\sqrt{3} - \sqrt{7}x$ (zobacz rysunek).



Stosujemy do trójkąta AEB twierdzenie Pitagorasa i otrzymujemy

$$\left(4\sqrt{3}-\sqrt{7}x\right)^2+(3x)^2=6^2$$

$$16x^2-8\sqrt{21}x+12=0$$

$$4x^2-2\sqrt{21}x+3=0$$

$$x=\frac{2\sqrt{21}-6}{8} \quad \vee \quad x=\frac{2\sqrt{21}+6}{8}$$

$$4x=\sqrt{21}-3 \quad \vee \quad 4x=\sqrt{21}+3$$

Ponieważ $\sqrt{21}+3>7>4\sqrt{3}=|BC|$, więc ostatecznie $|AC|=\sqrt{21}-3$.

Sposób III

Oznaczmy przez R promień okręgu opisanego na trójkącie ABC.
Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BAC|}=2R$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{\sin|\sphericalangle BAC|}=8$$

Stąd $|\sphericalangle BAC|=60°$ lub $|\sphericalangle BAC|=120°$.
Długość boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg o promieniu R jest równa $R\sqrt{3}=4\sqrt{3}=|BC|$. Niech D będzie wierzchołkiem trójkąta równobocznego BCD wpisanego w dany okrąg. Ponieważ $|AB|=6$, więc $A\neq D$. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków BD, to wówczas AC byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Gdyby wierzchołek A leżał na krótszym z łuków CD, to wówczas AB byłby najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Zatem A leży na krótszym z łuków BC okręgu i $|\sphericalangle BAC|=120°$.
Ponownie stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy:

$$\frac{|AB|}{\sin|\sphericalangle ACB|}=2R$$

$$\frac{6}{\sin|\sphericalangle ACB|}=8$$

Stąd $\sin|\measuredangle ACB| = \frac{3}{4}$.

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej i otrzymujemy

$$\sin^2|\measuredangle ACB| + \cos^2|\measuredangle ACB| = 1$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2|\measuredangle ACB| = 1$$

$$\cos|\measuredangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \vee \quad \cos|\measuredangle ACB| = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Ponieważ AB nie jest najdłuższym bokiem trójkąta, więc kąt ACB nie jest rozwarty i dlatego $\cos|\measuredangle ACB| = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Obliczamy $\sin|\measuredangle ABC|$:

$$\sin|\measuredangle ABC| = \sin(180° - |\measuredangle BAC| - |\measuredangle ACB|) = \sin(|\measuredangle BAC| + |\measuredangle ACB|) =$$

$$= \sin|\measuredangle BAC| \cdot \cos|\measuredangle ACB| + \sin|\measuredangle ACB| \cdot \cos|\measuredangle BAC| =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-3 + \sqrt{21}}{8}$$

Stosujemy do trójkąta ABC twierdzenie sinusów i otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin|\measuredangle ABC|} = 2R$$

$$|AC| = 2R \cdot \sin|\measuredangle ABC|$$

$$|AC| = 8 \cdot \frac{-3 + \sqrt{21}}{8} = -3 + \sqrt{21}$$

<u>*Uwaga:*</u>

Po obliczeniu $\cos|\measuredangle ACB|$ można obliczyć $\cos|\measuredangle ABC|$:

$$\cos|\measuredangle ABC| = \cos(180° - |\measuredangle BAC| - |\measuredangle ACB|) = -\cos(|\measuredangle BAC| + |\measuredangle ACB|) =$$

$$= -\cos|\measuredangle BAC| \cdot \cos|\measuredangle ACB| + \sin|\measuredangle ACB| \cdot \sin|\measuredangle BAC| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$$

Po zastosowaniu twierdzenia cosinusów otrzymujemy:

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot \cos|\measuredangle ABC|$$

$$|AC|^2 = 6^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{8}$$

$$|AC| = \sqrt{30 - 6\sqrt{21}}$$

$$|AC| = \sqrt{\left(\sqrt{21} - 3\right)^2}$$

$$|AC| = \sqrt{21} - 3$$

Zadanie 9. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: VII.R6) rozwiązuje równania trygonometryczne o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie $4\cos 2x\cos 5x = 2\cos 7x + 1$.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{k\pi}{5}$ oraz $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ oraz $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

3 pkt – rozwiązanie równania $\sin(5x) = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $\frac{k\pi}{5}$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$

ALBO

– rozwiązanie równania $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ w zbiorze liczb rzeczywistych: $-\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ lub $\frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

2 pkt – przekształcenie równoważne równania do postaci alternatywy dwóch równań trygonometrycznych: $\sin(5x) = 0$ lub $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1 pkt – zastosowanie wzorów na sinus sumy i różnicy kątów i przekształcenie równania do postaci

$\sin(5x)\cos x + \cos(5x)\sin x + \sqrt{3}\cdot\sin(5x) + \sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x = 0$

ALBO

– zastosowanie wzoru na sumę sinusów i przekształcenie równania do postaci

$2\sin\frac{6x+4x}{2}\cos\frac{6x-4x}{2} + \sqrt{3}\cdot\sin(5x) = 0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

Sposób I

Stosujemy wzory na sinus sumy oraz różnicy kątów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3}\cdot\sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin(5x + x) + \sqrt{3}\cdot\sin(5x) + \sin(5x - x) = 0$$

$$\sin(5x)\cos x + \cos(5x)\sin x + \sqrt{3}\cdot\sin(5x) + \sin(5x)\cos x - \cos(5x)\sin x = 0$$

$$\sin(5x)\cdot\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Sposób II

Stosujemy wzór na sumę sinusów i przekształcamy równanie równoważnie, otrzymując:

$$\sin(6x) + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) + \sin(4x) = 0$$

$$2\sin\frac{6x + 4x}{2}\cos\frac{6x - 4x}{2} + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$2\sin(5x)\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin(5x) = 0$$

$$\sin(5x) \cdot \left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$\sin(5x) = 0 \quad \vee \quad 2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$5x = k\pi \quad \vee \quad \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{k\pi}{5} \quad \vee \quad x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi k \quad \vee \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 10. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 1. Stosowanie obiektów matematycznych i operowanie nimi, interpretowanie pojęć matematycznych.	Zdający: X.3) rozpoznaje w graniastosłupach […] kąty między odcinkami (np. krawędziami, krawędziami i przekątnymi), oblicza miary tych kątów; X.4) oblicza […] pola powierzchni graniastosłupów […], również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

4 pkt – zastosowanie poprawnej metody i poprawny wynik: $\frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$.

3 pkt – wyznaczenie wysokości graniastosłupa: $a\sqrt{2}$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (wysokością graniastosłupa), np.

$$(H^2 + a^2) + (H^2 + a^2) - 2 \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \sqrt{H^2 + a^2} \cdot \frac{5}{6} = a^2$$

1 pkt – obliczenie cosinusa kąta α: $\frac{5}{6}$

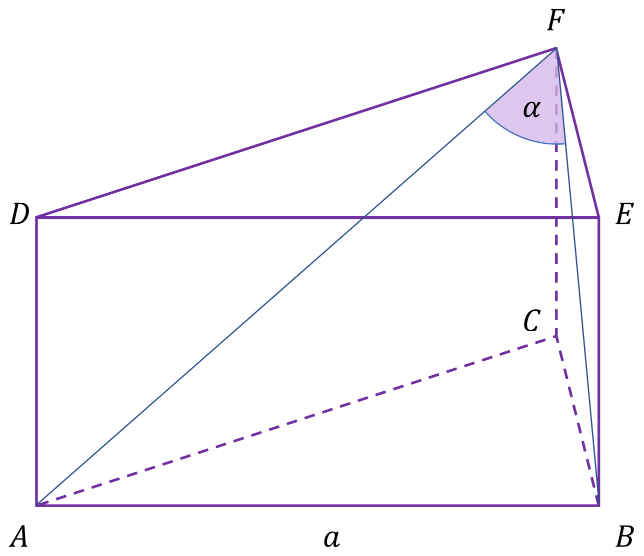
ALBO

– zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta ABF i zapisanie równania $|AF|^2 + |BF|^2 - 2 \cdot |AF| \cdot |BF| \cdot \cos\alpha = a^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Oznaczmy ponadto przez H wysokość graniastosłupa.
Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i obliczamy $\cos\alpha$:

$$\left(\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{36}$$

więc $\cos\alpha = \frac{5}{6}$, gdyż α jest kątem ostrym.
Stosujemy do trójkąta ABF twierdzenie cosinusów, a następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa i otrzymujemy:

$$|AF|^2 + |BF|^2 - 2\cdot|AF|\cdot|BF|\cdot\cos\alpha = a^2$$

$$(H^2+a^2)+(H^2+a^2)-2\cdot\sqrt{H^2+a^2}\cdot\sqrt{H^2+a^2}\cdot\frac{5}{6} = a^2$$

$$\frac{1}{3}\cdot(H^2+a^2) = a^2$$

$$H = a\sqrt{2}$$

Obliczamy pole P powierzchni całkowitej graniastosłupa:

$$P = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\cdot a\cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} + 3\sqrt{2}a^2$$

Zadanie 11. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: IX.R3) znajduje punkty wspólne prostej i okręgu oraz prostej i paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej.

Zasady oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na obliczeniu współrzędnych punktów A oraz B. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **2 punkty**.
Podział punktów za pierwszy etap rozwiązania:
2 pkt – obliczenie współrzędnych punktów A oraz B przecięcia paraboli i prostej
$3x+y=2=0$: $A=(-3,7)$ oraz $B=(2,-8)$.
1 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (jedną ze współrzędnych punktu A lub B), które wynika z układu równań $\begin{cases} y=x^2-2x-8 \\ 3x+y+2=0 \end{cases}$, np.
$3x+x^2-2x-8+2=0$, $y=\left(-\frac{y+2}{3}\right)^2+\frac{2(y+2)}{3}-8$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Drugi etap polega na obliczeniu współrzędnych punktu C. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **3 punkty**.
Podział punktów za drugi etap rozwiązania:
3 pkt – obliczenie współrzędnych punktu C: $C=(6,-2)$.
2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą (pierwszą/drugą współrzędną punktu C), np.
$\frac{\left|3c+\left(-\frac{1}{2}c+1\right)+2\right|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$.
1 pkt – uzależnienie drugiej/pierwszej współrzędnej punktu C od pierwszej/drugiej współrzędnej, np. $C=\left(c,-\frac{1}{2}c+1\right)$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na obliczeniu długości boku BC.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – obliczenie długości boku BC równoległoboku: $|BC|=2\sqrt{13}$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie
Obliczamy współrzędne punktów przecięcia paraboli z prostą o równaniu $3x+y+2=0$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ 3x + x^2 - 2x - 8 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x^2 + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 8 \\ x = -3 \ \lor \ x = 2 \end{cases}$$

Stąd $A = (-3\,, 7)$ oraz $B = (2\,, -8)$.

Punkt C leży na prostej o równaniu $y = -\frac{1}{2}x + 1$ i ma pierwszą współrzędną dodatnią, więc $C = \left(c, -\frac{1}{2}c + 1\right)$ przy pewnym $c > 0$.

Korzystamy ze wzoru na odległość punktu od prostej i otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\left|3c + \left(-\frac{1}{2}c + 1\right) + 2\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{|2{,}5c + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$|2{,}5c + 3| = 18$$

$$c = 6 \quad \lor \quad c = -\frac{42}{5}$$

Zatem $C = (6, -2)$.

Obliczamy długość boku BC:

$$|BC| = \sqrt{(6-2)^2 + (-2+8)^2} = 2\sqrt{13}$$

Zadanie 12. (0–6)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymagania ogólne	**Wymagania szczegółowe**
III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. 2. Dobieranie i tworzenie modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. 3. Tworzenie pomocniczych obiektów matematycznych na podstawie istniejących, w celu przeprowadzenia argumentacji lub rozwiązania problemu.	Zdający: III.R3) stosuje wzory Viète'a dla równań kwadratowych; III.R5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami, w szczególności wyznacza liczbę rozwiązań w zależności od parametrów, podaje warunki, przy których rozwiązania mają żądaną własność, i wyznacza rozwiązania w zależności od parametrów.

Zasady oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

Pierwszy etap polega na zapisaniu warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązaniu tej nierówności. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $\Delta > 0$ w postaci nierówności z niewiadomą m i rozwiązanie tej nierówności: $(m+1)^2 + 4\cdot(3-m)\cdot(m+1)^2 > 0$ oraz $m \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{13}{4}\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwaga:

Jeżeli zdający rozwiązuje warunek $\Delta \geq 0$, to za tę część rozwiązania otrzymuje **0 punktów**.

Drugi etap polega na wyznaczeniu tych wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$. Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

4 pkt – wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2 + x_2^2 = x_1 \cdot x_2 + 7$: 1, $\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$, $\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$.

3 pkt – zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2} = 0$ lub $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53 = 0$ **oraz** wyznaczenie jednego z rozwiązań tego równania (np. $m = 1$) i podzielenie wielomianu $3m^3 + 3m^2 - 59m + 53$ przez odpowiedni dwumian, np. $(3m^3 + 3m^2 - 59m + 53) : (m-1) = 3m^2 + 6m - 53$

ALBO

– zapisanie równania z niewiadomą m w postaci $\frac{-3m^3-3m^2+59m-53}{(3-m)^2}=0$ lub $3m^3+3m^2-59m+53=0$ **oraz** zastosowanie metody grupowania i zapisanie wielomianu $3m^3+3m^2-59m+53$ w postaci iloczynu co najmniej dwóch wielomianów stopni dodatnich, np. $(m-1)(3m^2+6m-53)$.

2 pkt – zapisanie równania z jedną niewiadomą m, wynikającego z warunku $x_1^2+x_2^2=x_1\cdot x_2+7$, np. $\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2-2\cdot\frac{-(m+1)^2}{3-m}=\frac{-(m+1)^2}{3-m}+7$.

1 pkt – przekształcenie warunku $x_1^2+x_2^2=x_1\cdot x_2+7$ do postaci pozwalającej na bezpośrednie zastosowanie wzorów Viète'a, np. $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+7$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Trzeci etap polega na zapisaniu warunku $3-m\neq 0$ oraz wyznaczeniu wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki: $3-m\neq 0$ i $\Delta>0$, i $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+7$.
Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1 pkt – zapisanie warunku $3-m\neq 0$ i poprawne wyznaczenie wszystkich wartości parametru m, które spełniają jednocześnie warunki $3-m\neq 0$ i $\Delta>0$, i $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+7$: 1, $\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązania

I etap

Równanie $(3-m)x^2+(m+1)x-(m+1)^2=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste tylko wtedy, gdy $3-m\neq 0$ i wyróżnik trójmianu $(3-m)x^2+(m+1)x-(m+1)^2$ jest dodatni. Rozwiązujemy warunek $\Delta>0$:

$$(m+1)^2+4\cdot(3-m)(m+1)^2>0$$

$$(m+1)^2[1+4\cdot(3-m)]>0$$

$$(m+1)^2\cdot(13-4m)>0$$

$$-4\cdot(m+1)^2\cdot\left(m-\frac{13}{4}\right)>0$$

$$m\in(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{13}{4}\right)$$

II etap

Sposób I

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2-2\cdot\frac{-(m+1)^2}{3-m}=\frac{-(m+1)^2}{3-m}+7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2-3\cdot\frac{(m+1)^2}{m-3}-7=0$$

$$\frac{(m+1)^2-3\cdot(m+1)^2(m-3)-7(m-3)^2}{(m-3)^2}=0$$

$$m^2+2m+1-3(m^2+2m+1)(m-3)-7(m^2-6m+9)=0 \ \wedge \quad m\neq 3$$

$$-3m^3-3m^2+59m-53=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

$$-3m^3+3m-3m^2+3m+53m-53=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

$$-3m(m^2-1)-3m(m-1)+53(m-1)=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

$$(m-1)[-3m(m+1)-3m+53]=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

$$(m-1)[-3m^2-6m+53]=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

$$\left(m=1 \quad \vee \quad m=\frac{-3-2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m=\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}\right) \ \wedge \ m\neq 3$$

$$m=1 \quad \vee \quad m=\frac{-3-2\sqrt{42}}{3} \quad \vee \quad m=\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$$

Sposób II

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru m, dla których jest spełniony warunek $x_1^2+x_2^2=x_1x_2+7$, korzystając ze wzorów Viète'a:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=x_1x_2+7$$

$$\left(-\frac{m+1}{3-m}\right)^2-2\cdot\frac{-(m+1)^2}{3-m}=\frac{-(m+1)^2}{3-m}+7$$

$$\left(\frac{m+1}{m-3}\right)^2-3\cdot\frac{(m+1)^2}{m-3}-7=0$$

$$\frac{(m+1)^2-3\cdot(m+1)^2(m-3)-7(m-3)^2}{(m-3)^2}=0$$

$$m^2+2m+1-3(m^2+2m+1)(m-3)-7(m^2-6m+9)=0 \ \wedge \quad m\neq 3$$

$$-3m^3-3m^2+59m-53=0 \quad \wedge \quad m\neq 3$$

Zauważamy, że liczba 1 jest pierwiastkiem wielomianu $-3m^3-3m^2+59m-53$. Dzielimy wielomian $-3m^3-3m^2+59m-53$ przez dwumian $m-1$. Dzielenie to możemy wykonać, korzystając np. z algorytmu Hornera

	-3	-3	59	-53
1	-3	-6	53	0

Otrzymujemy $(m-1)(-3m^2-6m+53)=0$. Stąd $m=1$ lub $m=\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}$, lub $m=\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}$.

III etap

Wyznaczamy wszystkie wartości parametru $m \neq 3$, które jednocześnie spełniają warunki $m \in (-\infty,-1) \cup \left(-1,\frac{13}{4}\right)$ oraz $m \in \left\{1,\frac{-3-2\sqrt{42}}{3},\frac{-3+2\sqrt{42}}{3}\right\}$: $m \in \left\{1,\frac{-3-2\sqrt{42}}{3}\right\}$.

Zadanie 13.1. (0–2)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymaganie szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 1. Przeprowadzanie rozumowań, także kilkuetapowych, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, odróżnianie dowodu od przykładu.	Zdający: X.4) oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów i ostrosłupów, również z wykorzystaniem trygonometrii i poznanych twierdzeń.

Zasady oceniania

2 pkt – przeprowadzenie pełnego rozumowania.

1 pkt – wyznaczenie pola P_p podstawy ostrosłupa w zależności od promienia R okręgu opisanego na podstawie: $P_p = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

A, B, C – wierzchołki podstawy ostrosłupa,
S – wierzchołek ostrosłupa,
H – wysokość ostrosłupa poprowadzona z wierzchołka S na płaszczyznę podstawy ABC,
a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa.

Podstawa ABC ostrosłupa jest trójkątem równobocznym, więc promień R okręgu opisanego na podstawie jest równy $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Stąd $a = R\sqrt{3}$. Zatem pole P_p podstawy jest równe $P_p = \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Ponieważ $H + R = 6$, więc $H = 6 - R$.

Wyznaczamy objętość V ostrosłupa w zależności od R:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} \cdot (6 - R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

Zadanie 13.2. (0–4)

Wymagania egzaminacyjne 2024	
Wymaganie ogólne	**Wymagania szczegółowe**
IV. Rozumowanie i argumentacja. 4. Stosowanie i tworzenie strategii przy rozwiązywaniu zadań, również w sytuacjach nietypowych.	Zdający: XIII.R3) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu; XIII.R4) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.R5) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.

Zasady oceniania

4 pkt – uzasadnienie, że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $R = 4$ i obliczenie wartości największej funkcji V: $8\sqrt{3}$.

3 pkt – uzasadnienie (np. poprzez badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V przyjmuje wartość największą dla $R = 4$
ALBO
– przekształcenie nierówności $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$ do postaci $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$ **oraz** zapisanie, że równość zachodzi tylko wtedy, gdy liczby R oraz $12-2R$ są równe.

2 pkt – obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji V: $R = 4$
ALBO
– obliczenie wartości R, dla której zachodzi równość średniej arytmetycznej i geometrycznej liczb dodatnich R, R oraz $12-2R$: $R = 4$,
ALBO
– przekształcenie nierówności $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$ do postaci $\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji V: $V'(R) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (12R - 3R^2)$
ALBO
– zapisanie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną liczb R, R oraz $12-2R$: $\frac{R+R+12-2R}{3} \geq \sqrt[3]{R \cdot R \cdot (12-2R)}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, albo brak rozwiązania.

Uwagi:

1. Za poprawne uzasadnienie, że rozważana funkcja posiada wartość największą dla wyznaczonej wartości R, przy której pochodna się zeruje, można uznać sytuację, gdy zdający bada znak pochodnej oraz:

– opisuje (słownie lub graficznie - np. przy użyciu strzałek) monotoniczność funkcji V
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości R funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jednocześnie jej największa wartość,
LUB
– zapisuje, że dla wyznaczonej wartości R funkcja V ma maksimum lokalne i jest to jedyne ekstremum tej funkcji.

2. Badanie znaku pochodnej zdający może opisać w inny sposób, np. szkicując wykres funkcji, która w ten sam sposób jak pochodna zmienia znak, i zaznaczając na rysunku, np. znakami „+” i „-” znak pochodnej.
3. Jeżeli zdający przedstawi niepełne uzasadnienie, że dla $R=4$ funkcja V osiąga najmniejszą wartość i obliczy $V(4)=8\sqrt{3}$, to otrzymuje **3 punkty** za całe rozwiązanie. Jeśli zdający nie przedstawi żadnego uzasadnienia i obliczy $V(4)=8\sqrt{3}$, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

Przykładowe pełne rozwiązania
Sposób I
Wyznaczamy pochodną funkcji V: $V'(R)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(12R-3R^2)$ dla $R\in(0,6)$.
Obliczamy miejsca zerowe pochodnej funkcji V:

$$V'(R)=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(12R-3R^2)=0$$

$$3R\cdot(4-R)=0$$

$$R=0\notin(0,6) \quad \text{lub} \quad R=4\in(0,6)$$

Badamy znak pochodnej:
$V'(R)>0$ dla $R\in(0,4)$,
$V'(R)<0$ dla $R\in(4,6)$.
Zatem funkcja V jest rosnąca w przedziale $(0,4]$ oraz jest malejąca w przedziale $[4,6)$.
Stąd dla $R=4$ funkcja V osiąga wartość największą równą

$$V(4)=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(6\cdot4^2-4^3)=8\sqrt{3}$$

Sposób II
Ponieważ $R\in(0,6)$, więc liczby R, R oraz $12-2R$ są dodatnie. Z nierówności między średnimi arytmetyczną i geometryczną dla liczb dodatnich R, R oraz $12-2R$ otrzymujemy

$$\frac{R+R+12-2R}{3}\geq\sqrt[3]{R\cdot R\cdot(12-2R)}$$

$$4 \geq \sqrt[3]{2 \cdot (6R^2 - R^3)}$$

$$64 \geq 2 \cdot (6R^2 - R^3)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{8} \cdot 64 \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (6R^2 - R^3)$$

$$8\sqrt{3} \geq V(R)$$

przy czym równość zachodzi tylko dla tych R, dla których $R = 12 - 2R$ i jednocześnie $R \in (0, 6)$, tj. dla $R = 4$.

Zatem funkcja V osiąga wartość największą dla $R = 4$ i wtedy $V(4) = 8\sqrt{3}$.